

# Ungleichungen

Karl Czakler

11. Dezember 2006

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Mittelungleichungen</b>	<b>3</b>
1.1 Elementare Ungleichungen . . . . .	3
1.2 Mittelungleichungen . . . . .	5
<b>2 Cauchy-Schwarz Ungleichung</b>	<b>8</b>
2.1 Satz und Beweis . . . . .	8
2.2 Lösen von Ungleichungen mit Cauchy . . . . .	9
<b>3 Symmetrische Ungleichungen</b>	<b>12</b>
3.1 Begriffe . . . . .	12
3.2 Ordnen der Variablen und die Ungleichung von Schur . . . . .	13
3.3 Muirhead Ungleichung . . . . .	14
3.4 Elementarsymmetrische Polynome . . . . .	16
<b>4 Substitutionen</b>	<b>18</b>
4.1 Die Ravi Substitution . . . . .	18
4.2 Trigonometrische Substitutionen . . . . .	19
4.3 Algebraische Substitutionen . . . . .	20
<b>5 Homogene Ungleichungen</b>	<b>22</b>
5.1 Normieren von homogenen Ungleichungen. . . . .	22
5.2 Homogenisieren von Ungleichungen . . . . .	23
<b>6 Jensen Ungleichung</b>	<b>25</b>
6.1 Konvexe Funktionen . . . . .	25
6.2 Jensen Ungleichung . . . . .	27
6.3 Beweis der Mittelungleichungen . . . . .	29
<b>7 Umordnungs- und Tschebyschew Ungleichung</b>	<b>31</b>
7.1 Umordnungsungleichung . . . . .	31
7.2 Tschebyschew-Ungleichung . . . . .	33
<b>8 Weitere Strategien</b>	<b>35</b>
8.1 Umformungen . . . . .	35
8.2 Abschätzungen . . . . .	36
8.3 Lineare und konvexe Funktionen . . . . .	37
8.4 Induktion . . . . .	38

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	2
<b>9 Weitere wichtige Ungleichungen</b>	<b>40</b>
9.1 Die Bernoulli Ungleichung . . . . .	40
9.2 MacLaurin Ungleichung . . . . .	40
9.3 Young Ungleichung . . . . .	41
9.4 Hölder Ungleichung . . . . .	43
<b>10 Beispiele</b>	<b>45</b>

# Kapitel 1

## Mittelungleichungen

### 1.1 Elementare Ungleichungen

Es sei  $x \in \mathbb{R}$ . Die wichtigste Ungleichung lautet:  $x^2 \geq 0$  mit Gleichheit nur für  $x = 0$ .

Kann man daher eine Ungleichung mit Äquivalenzumformungen auf eine Form der Gestalt  $\sum_i a_i^2$  bringen, so hat man die Ungleichung bewiesen. Das gelingt oft, wenn man zu vollständigen Quadraten ergänzt. ( "Quadratvervollständigung".) Zur Illustration möge folgendes Beispiel dienen:

**Beispiel 1.1.1.** *Es seien  $a, b$  reelle Zahlen. Beweise:*

$$a^2 + b^2 + ab \geq 3(a + b - 1)$$

**Lösung:** Umgeformt schreibt sich die Ungleichung so:

$$a^2 + b^2 + ab - 3a - 3b + 3 \geq 0$$

Man baut nun die linke Seite zur Summe von zwei Quadraten wie folgt um:

$$\left(a + \frac{b}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} - \frac{3b}{2} + \frac{3}{4} = \left(a + \frac{b}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

□

Die Mittelungleichungen für zwei Variable:

**Satz 1.1.** *Es seien  $x_1, x_2$  positive reelle Zahlen. Es gilt:*

$$\max(x_1, x_2) \geq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \geq \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} \geq \min(x_1, x_2)$$

$$QM \geq AM \geq GM \geq HM$$

*Quadratisches Mittel*  $\geq$  *Arithmetisches Mittel*  $\geq$

*Geometrisches Mittel*  $\geq$  *Harmonisches Mittel*

*Gleichheit für  $x_1 = x_2$ .*

Der Beweis dieser Ungleichungen erfolgt durch Rückführung mit Äquivalenzumformungen auf die "Mutter" aller Ungleichungen, nämlich  $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$ . Daraus folgt auch, dass die Gleichheit in jeder dieser Ungleichungen genau dann gilt, wenn  $x_1 = x_2$ . Wir schreiben, wenn wir auf diese Ungleichungen hinweisen, kurz AM-GM, QM-AM usw.

Mit diesen Mittelungleichungen oder durch entsprechende Äquivalenzumformungen beweist man unmittelbar folgende Ungleichungen, die zum Grundwissen gehören:

$$a + 1 \geq 2\sqrt{a} \quad a \in \mathbb{R}^+, \quad \text{Gleichheit für } a = 1 \quad (1.1)$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \quad a, b \in \mathbb{R}^+, \quad \text{Gleichheit für } a = b \quad (1.2)$$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad \text{Gleichheit für } x = 1 \quad (1.3)$$

$$(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4 \quad a, b \in \mathbb{R}^+, \quad \text{Gleichheit für } a = b \quad (1.4)$$

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc \quad a, b, c \in \mathbb{R}^+, \quad \text{Gleichheit für } a = b = c \quad (1.5)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad \text{Gleichheit für } a = b = c \quad (1.6)$$

$$(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad \text{Gleichheit für } a = b = c \quad (1.7)$$

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad \text{Gleichheit für } a = b = c \quad (1.8)$$

$$\sqrt{(a + c)(b + d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}^+, \quad \text{Gleichheit für } bc = ad \quad (1.9)$$

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad a, b \in \mathbb{R}^+, \quad \text{Gleichheit für } a = b \quad (1.10)$$

Eine wichtige elementare Ungleichung ist:

**Beispiel 1.1.2.** Es seien  $a, b$  reelle Zahlen und  $x, y$  positive reelle Zahlen. Dann gilt:

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} \geq \frac{(a_1 + a_2)^2}{x_1 + x_2}$$

**Lösung:** Durch Ausmultiplizieren erhält man

$$a_1^2 x_2 (x_1 + x_2) + a_2^2 x_1 (x_1 + x_2) \geq (a_1 + a_2)^2 x_1 x_2,$$

und daraus ergibt sich:

$$(a_1 x_2 - a_2 x_1)^2 \geq 0.$$

Wir sehen auch, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn  $\frac{a_1}{x_1} = \frac{a_2}{x_2}$ .

□

Daraus folgt sofort:

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \frac{a_3^2}{x_3} \geq \frac{(a_1 + a_2)^2}{x_1 + x_2} + \frac{a_3^2}{x_3} \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{x_1 + x_2 + x_3}.$$

Daraus ergibt sich mit vollständiger Induktion allgemein folgender Hilssatz:

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \dots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} \quad (1.11)$$

mit  $a_i \in \mathbb{R}$  und  $x_i \in \mathbb{R}^+$  und mit Gleichheit für

$$\frac{a_1}{x_1} = \frac{a_2}{x_2} = \dots = \frac{a_n}{x_n}.$$

Mit diesem Hilssatz 1.11 lassen sich unmittelbar etwa die Beispiele 7 bis 12 in Kapitel 10 lösen und mit ihm werden wir auch die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung im nächsten Kapitel beweisen.

## 1.2 Mittelungleichungen

**Satz 1.2.** *Es seien  $x_1, x_2, \dots, x_n$  positive reelle Zahlen. Es gilt:*

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

$$QM \geq AM \geq GM \geq HM$$

Quadratisches Mittel  $\geq$  Arithmetisches Mittel  $\geq$

Geometrisches Mittel  $\geq$  Harmonisches Mittel

Gleichheit gilt nur für  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

Aus der AM-HM Ungleichung kann man sofort folgende Ungleichungen ableiten:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2 \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+ \quad (1.12)$$

Ein exemplarisches Beispiel für die Verwendung der Mittelungleichungen ist folgende Aufgabe:

**Beispiel 1.2.1.** *Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen mit  $a+b+c=1$ . Beweise:*

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}$$

**Lösung:** Wegen der QM -AM Ungleichung gilt:

$$\sqrt{\frac{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2}{3}} \geq \frac{a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c}}{3}$$

Daher genügt es zu zeigen

$$\frac{\left(a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c}\right)^2}{3} \geq \frac{100}{3},$$

und mit  $a+b+c=1$  folgt:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9.$$

Diese Ungleichung ist aber richtig (vgl. 1.12)

□

Aus den obigen Mittelungleichungen ergeben sich unmittelbar die "Gewichteten Mittelungleichungen":

**Satz 1.3.** *Es seien  $w_1, w_2, \dots, w_n$  natürliche Zahlen größer als Null ("Gewichte") und  $x_1, x_2, \dots, x_n$  positive reelle Zahlen. Es gilt:*

$$\sqrt{\frac{w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 + \dots + w_n x_n^2}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}} \geq \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} \geq$$

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n \sqrt{x_1^{w_1} x_2^{w_2} \dots x_n^{w_n}} \geq \frac{w_1 + w_2 + \dots + w_n}{\frac{w_1}{x_1} + \frac{w_2}{x_2} + \dots + \frac{w_n}{x_n}}$$

Gleichheit gilt nur für  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

**Beispiel 1.2.2.** : Es seien  $a, b, c, d$  positive reelle Zahlen mit  $a+b+c+d = 5$ . Bestimme den größtmöglichen Wert von

$$ab^2c^3d^4.$$

Für welche Werte von  $a, b, c, d$  wird dieser Maximalwert angenommen?

**Lösung:**

$$5 = a + b + c + d = a + 2\left(\frac{b}{2}\right) + 3\left(\frac{c}{3}\right) + 4\left(\frac{d}{4}\right)$$

Daher gilt

$$\frac{a + 2\left(\frac{b}{2}\right) + 3\left(\frac{c}{3}\right) + 4\left(\frac{d}{4}\right)}{10} \geq \sqrt[10]{a\left(\frac{b}{2}\right)^2\left(\frac{c}{3}\right)^3\left(\frac{d}{4}\right)^4},$$

und daraus folgt unmittelbar:

$$27 \geq ab^2c^3d^4.$$

Gleichheit gilt für  $a = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{d}{4}$ , also wenn  $a = \frac{1}{2}, b = 1, c = \frac{3}{2}$  und  $d = 2$ .

□

Die allgemeinen Mittelungleichungen:

**Definition:** Es seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ . Das " $\alpha$ -Mittel" von  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sei für  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$m_\alpha := \left( \frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \dots + x_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

und für  $\alpha = 0$

$$m_0 = (x_1 \cdot x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

$m_1$  ist das arithmetische -Mittel,  $m_0$  das geometrische Mittel,  $m_{-1}$  ist das harmonische Mittel und  $m_2$  das quadratische Mittel.

Die allgemeine Mittelungleichung lautet nun:

**Satz 1.4.** Es seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ . Das  $\alpha$ -Mittel von  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sei wie in obiger Definition angegeben. Dann gilt für  $\alpha < \beta$

$$\min_i \{x_i\} \leq m_\alpha \leq m_\beta \leq \max_i \{x_i\}$$

mit Gleichheit für  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

Der Beweis der Mittelungleichungen erfolgt im Kapitel 6 (Jensen-Ungleichung)

Daraus ergibt sich unmittelbar:

Sind  $n$  und  $m$  natürliche Zahlen größer als Null und  $n > m$ , so gilt:

$$\sqrt[n]{\frac{x_1^n + x_2^n + \dots + x_p^n}{p}} \geq \sqrt[m]{\frac{x_1^m + x_2^m + \dots + x_p^m}{p}} \quad (1.13)$$

**Beispiel 1.2.3.** (Belarus 2000) Es seien  $a, b, c, x, y, z$  positive reelle Zahlen. Beweise:

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}$$

**Lösung:** Nach dem Hilfssatz 1.11 gilt:

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geq \frac{\left(a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}}\right)^2}{x+y+z}$$

Es genügt daher zu zeigen:

$$\left(a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}}\right)^2 \geq \frac{(a+b+c)^3}{3}.$$

Das folgt aber aus der allgemeinen Mittelungleichung für  $\alpha = \frac{1}{3}$  und  $\beta = \frac{1}{2} > \alpha$ :

$$\left(\frac{(a^3)^{\frac{1}{2}} + (b^3)^{\frac{1}{2}} + (c^3)^{\frac{1}{2}}}{3}\right)^2 \geq \left(\frac{(a^3)^{\frac{1}{3}} + (b^3)^{\frac{1}{3}} + (c^3)^{\frac{1}{3}}}{3}\right)^3$$

□

Wie kann man diese Ungleichung verallgemeinern?

## Kapitel 2

# Cauchy-Schwarz Ungleichung

### 2.1 Satz und Beweis

Die Cauchy-Schwarz Ungleichung, oft auch nur Cauchy Ungleichung bezeichnet, ist ein wichtiges Werkzeug beim Lösen von Ungleichungen.

**Satz 2.1.** *Es seien  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  reelle Zahlen. Dann gilt:*

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

*Gleichheit gilt genau dann, wenn*

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n},$$

*oder anders ausgedrückt, wenn die Vektoren  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  und  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  linear abhängig sind.*

Bemerkung: Fasst man  $\vec{u} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  und  $\vec{v} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  als Elemente des  $\mathbb{R}^n$  mit dem Standardskalarprodukt auf, dann kann man die Ungleichung auch so schreiben:

$$\vec{u}^2 \vec{v}^2 \geq (\vec{u}\vec{v})^2$$

**Beweis:** Wir leiten diesen Satz unmittelbar mit dem Hilfssatz 1.11 her:

Nach 1.11 gilt

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \dots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$$

mit  $a_i \in \mathbb{R}$  und  $x_i \in \mathbb{R}^+$ , und mit Gleichheit für

$$\frac{a_1}{x_1} = \frac{a_2}{x_2} = \dots = \frac{a_n}{x_n}.$$

Es gilt nun:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) = \frac{a_1^2 b_1^2}{b_1^2} + \frac{a_2^2 b_2^2}{b_2^2} + \dots + \frac{a_n^2 b_n^2}{b_n^2} \geq \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2}{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$$

Daraus folgt unmittelbar die Ungleichung von Cauchy-Schwarz samt der Bedingung

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n},$$

für Gleichheit.

□

Den Satz von Cauchy kann man auch so beweisen:

**Beweis:** Man betrachtet für gegebene  $a_i$  und  $b_i$  die reelle Funktion

$$f(x) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \dots + (a_nx - b_n)^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)x^2 - 2\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)x + \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

Diese quadratische Funktion nimmt nur nichtnegative Werte an, daher ist ihre Diskriminante nicht positiv. Es gilt also:

$$4\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \leq 0 \iff \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $f(x) = 0$ , also wenn

$$a_1x - b_1 = a_2x - b_2 = \dots = a_nx - b_n = 0.$$

Das ist genau dann der Fall, wenn die beiden Vektoren  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  und  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  linear abhängig sind.

□

**Folgerungen:**

Es seien  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$  positive reelle Zahlen. Dann gilt:

$$\sqrt{(x_1 + \dots + x_n)(y_1 + \dots + y_n)} \geq \sqrt{x_1 y_1} + \sqrt{x_2 y_2} + \dots + \sqrt{x_n y_n}. \tag{2.1}$$

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \dots + \frac{x_n}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n} \tag{2.2}$$

$$\frac{x_1}{y_1^2} + \frac{x_2}{y_2^2} + \dots + \frac{x_n}{y_n^2} \geq \frac{1}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} \left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \dots + \frac{x_n}{y_n}\right) \tag{2.3}$$

Die erste Folgerung 2.1 etwa ergibt sich, wenn man in der Ungleichung von Cauchy - Schwarz  $a_i = \sqrt{x_i}$  und  $b_i = \sqrt{y_i}$  setzt.

Multipliziert man die zweite Ungleichung 2.2 mit dem Nenner der rechten Seite so erhält man

$$\left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \dots + \frac{x_n}{y_n}\right)(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n) \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2,$$

und diese Ungleichung ist nach dem Satz von Cauchy richtig.

Analog beweist man die dritte Ungleichung.

## 2.2 Lösen von Ungleichungen mit Cauchy

Wir wollen anhand von drei Beispielen zeigen wie man mit Cauchy beim Lösen von Ungleichungen arbeitet:

**Beispiel 2.2.1.** *Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen. Beweise:*

$$\frac{a}{a + 2b + c} + \frac{b}{b + 2c + a} + \frac{c}{c + 2b + a} \geq \frac{3}{4}$$

**Lösung:** Nach dem Satz von Cauchy gilt:

$$\left(a(a+2b+c) + b(b+2c+a) + c(c+2b+a)\right) \left(\frac{a}{a+2b+c} + \frac{b}{b+2c+a} + \frac{c}{c+2b+a}\right) \geq (a+b+c)^2$$

Es genügt daher zu zeigen

$$\frac{(a+b+c)^2}{a(a+2b+c) + b(b+2c+a) + c(c+2b+a)} \geq \frac{3}{4}.$$

Durch Umformen erhält man

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca,$$

und diese Ungleichung (vgl.1.6) ist richtig.

□

**Beispiel 2.2.2.** (IMO 2001) Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen. Beweise:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

**Lösung:** Vielleicht nicht der eleganteste aber ein durchaus naheliegender Weg diese Aufgabe zu lösen ist es, die Lösung mit Cauchy zu versuchen: Es gilt:

$$\left(a\sqrt{a^2 + 8bc} + b\sqrt{b^2 + 8ca} + c\sqrt{c^2 + 8ab}\right) \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}}\right) \geq (a+b+c)^2$$

Es genügt also zu beweisen:

$$\frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{a^2 + 8bc} + b\sqrt{b^2 + 8ca} + c\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

oder

$$(a+b+c)^2 \geq a\sqrt{a^2 + 8bc} + b\sqrt{b^2 + 8ca} + c\sqrt{c^2 + 8ab}.$$

Man muss jetzt die rechte Seite dieser Ungleichung irgendwie nach oben abschätzen. Hier hilft uns wieder Cauchy, genauer die Folgerung 2.1. Wir schreiben:

$$a\sqrt{a^2 + 8bc} = \sqrt{a}\sqrt{a^3 + 8abc}, \quad b\sqrt{b^2 + 8ca} = \sqrt{b}\sqrt{b^3 + 8abc},$$

$$\text{und} \quad c\sqrt{c^2 + 8ab} = \sqrt{c}\sqrt{c^3 + 8abc}$$

und haben mit 2.1:

$$\begin{aligned} \sqrt{(a+b+c)(a^3 + 8abc + b^3 + 8abc + c^3 + 8abc)} &\geq \\ &\sqrt{a(a^3 + 8abc)} + \sqrt{b(b^3 + 8abc)} + \sqrt{c(c^3 + 8abc)} \end{aligned}$$

Und damit haben wir nur mehr zu zeigen:

$$(a+b+c)^2 \geq \sqrt{(a+b+c)(a^3 + b^3 + c^3 + 24abc)}$$

Durch Quadrieren und Ausmultiplizieren erhalten wir

$$ab^2 + ac^2 + ba^2 + bc^2 + ca^2 + cb^2 \geq 6abc,$$

und diese Ungleichung ist richtig. ( $ab^2 + ac^2 \geq 2abc, \dots$  AM-GM Ungleichung)

□

Es besteht natürlich bei solchen Abschätzungen mit Cauchy keine Gewähr, dass sie immer, so wie hier, zum Ziel führen, da sie manchmal zu grob sind. Eine besonders schöne Anwendung und einen extrem kurzen Beweis liefert Cauchy bei dieser Ungleichung:

**Beispiel 2.2.3.** (Iran 1998) *Es seien  $x, y, z > 1$  reelle Zahlen mit*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2.$$

*Beweise:*

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$$

**Lösung:** Vielleicht erkennt man, dass man die Nebenbedingung auch so schreiben kann:

$$\frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z} = 1.$$

Nach Cauchy, genauer wieder Folgerung 2.1 gilt nun

$$\sqrt{(x+y+z) \left( \frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z} \right)} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$$

und das ist genau die Behauptung, wenn man die umgeformte Nebenbedingung beachtet.

□

# Kapitel 3

## Symmetrische Ungleichungen

### 3.1 Begriffe

Viele Ungleichungen beinhalten symmetrische Ausdrücke in den auftretenden Variablen. Einen Ausdruck nennen wir symmetrisch in seinen Variablen, wenn jede Permutation der Veränderlichen den Ausdruck unverändert läßt.

Dagegen heißt ein Ausdruck zyklisch, wenn er lediglich invariant gegenüber einer Vorwärtsvertauschung der Variablen

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x_2, x_3, \dots, x_n, x_1) \rightarrow \dots \rightarrow (x_n, x_1, \dots, x_{n-1})$$

oder auch invariant gegenüber einer Rückwärtsvertauschung

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x_n, x_1, \dots, x_{n-1}) \rightarrow \dots \rightarrow (x_2, x_3, \dots, x_n, x_1)$$

ist, also nicht beliebig permutiert wird, sondern die Reihenfolge eingehalten wird. Die Nesbitt-Ungleichung

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2} \quad x, y, z \in \mathbb{R}^+ \quad (3.1)$$

ist symmetrisch, da jede Permutation der Variablen  $x, y, z$  die Ungleichung in sich überführt. Die Ungleichung

$$x^2y + y^2z + z^2x \geq 3xyz \quad x, y, z \in \mathbb{R}^+ \quad (3.2)$$

ist zyklisch. Sie gestattet nur folgende Vertauschungsmöglichkeiten:  $(x, y, z) \rightarrow (y, z, x) \rightarrow (z, x, y)$ . Es ist sinnvoll, um sich manchmal viel Schreibarbeit zu ersparen, die Notationen  $\sum_{sym}$  und  $\sum_{cyc}$  einzuführen. Wenn  $P(x, y, z)$  ein Ausdruck in den drei Variablen  $x, y, z$  ist, dann definieren wir:

$$\sum_{sym} P(x, y, z) = P(x, y, z) + P(x, z, y) + P(y, x, z) + P(y, z, x) + P(z, x, y) + P(z, y, x),$$

$$\sum_{cyc} P(x, y, z) = P(x, y, z) + P(y, z, x) + P(z, x, y).$$

Beispiele für symmetrische und zyklische Terme in 3 Variablen:

$$\sum_{sym} x^2y = x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2y$$

$$\sum_{\text{sym}} xyz = 6xyz, \quad \sum_{\text{sym}} x^3 = 2(x^3 + y^3 + z^3)$$

$$\sum_{\text{cyc}} x^3y = x^3y + y^3z + z^3x, \quad (x + y + z)^3 = \sum_{\text{cyc}} x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 2xyz$$

Obige Ungleichungen 3.1 und 3.2 könnten wir daher auch so notieren:

$$\frac{1}{2} \left( \sum_{\text{sym}} \frac{x}{y+z} \right) = \sum_{\text{cyc}} \frac{x}{y+z} \geq \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{\text{cyc}} x^2y \geq 3xyz$$

### 3.2 Ordnen der Variablen und die Ungleichung von Schur

Symmetrische Ungleichungen gestatten ohne Einschränkung der Allgemeinheit, dass ihre Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  beliebig geordnet sind: Zum Beispiel:

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \quad \text{oder} \quad x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$$

Damit können wir nun leicht eine sehr wichtige Ungleichung beweisen:

**Satz 3.1. (Schur'sche Ungleichung)** *Es seien  $x, y, z$  positive reelle Zahlen. Dann gilt für jedes reelle  $r > 0$ :*

$$\sum_{\text{cyc}} x^r(x-y)(x-z) \geq 0$$

**Beweis:** Die Ungleichung ist symmetrisch, daher können wir o.B.d.A. annehmen  $x \geq y \geq z$ . Die gegebene Ungleichung kann man dann so anschreiben:

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-z)(y-x) + z^r(z-x)(z-y) =$$

$$(x-y)[x^r(x-z) - y^r(y-z)] + z^r(x-z)(y-z) \geq 0$$

Es gilt:  $x - y \geq 0, x - z \geq 0, y - z \geq 0$ , und  $x^r(x-z) - y^r(y-z) \geq 0$ . Daher ist jeder Term auf der linken Seite positiv und die Ungleichung ist bewiesen. Gleichheit gilt für  $x = y = z$ .

□

**Bemerkung 1:** Ein wichtiger Sonderfall ist  $r = 1$ :

$$\sum_{\text{cyc}} x(x-y)(x-z) \geq 0 \tag{3.3}$$

Daraus folgt

$$3xyz + \sum_{\text{cyc}} x^3 \geq \sum_{\text{cyc}} x^2y + xy^2, \tag{3.4}$$

weilers

$$3xyz + \sum_{\text{cyc}} x^3 \geq \sum_{\text{cyc}} 2(xy)^{\frac{3}{2}}, \tag{3.5}$$

und

$$xyz \geq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z). \tag{3.6}$$

**Bemerkung 2:** Die Ungleichung 3.6 ist für den Fall, dass die Variablen nicht die Dreiecksungleichungen erfüllen, trivial: Offensichtlich können niemals zwei der Klammernausdrücke negativ sein, da in diesem Fall eine Variable kleiner als Null sein müsste. Ist aber ein Klammernausdruck negativ, so gilt die Behauptung.

**Bemerkung 3:** Im Fall, dass  $y + z \geq x, z + x \geq y, x + y \geq z$  ist, kann man  $x, y, z$  als Seiten eines (eventuell zu einer Strecke entarteten) Dreiecks auffassen und die Ungleichung 3.6 so anschreiben:

$$xyz \geq 8(s-x)(s-y)(s-z), \quad s = \frac{x+y+z}{2} \tag{3.7}$$

Beachtet man nun, dass man den Umkreisradius  $R$  eines Dreiecks mit der Formel  $R = \frac{xyz}{4A}$ , den Inkreisradius  $r$  mit der Formel  $r = \frac{A}{s}$  und die Fläche  $A$  mit der Heronschen Flächenformel  $A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$  berechnet, so ergibt sich aus dieser Ungleichung unmittelbar die bekannte Beziehung  $R \geq 2r$  (Gleichheit  $2R = r$  für  $x = y = z$ .)

Die geometrische Ungleichung  $R \geq 2r$  ist also äquivalent zu der algebraischen Ungleichung 3.3 wenn  $x, y, z$  die Seiten eines Dreiecks sind.

### 3.3 Muirhead Ungleichung

Diese Ungleichung sei für zwei bzw drei Variable vorgestellt (sie läßt sich leicht auf mehrere Variable verallgemeinern):

**Satz 3.2.** *Es seien  $x, y$  positive reelle Zahlen und  $a_1, a_2, b_1, b_2$  positive reelle Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen:*

$$a_1 \geq a_2 \geq 0 \quad b_1 \geq b_2 \geq 0 \quad a_1 \geq b_1 \quad \text{und} \quad a_1 + a_2 = b_1 + b_2$$

Dann gilt:

$$x^{a_1}y^{a_2} + x^{a_2}y^{a_1} \geq x^{b_1}y^{b_2} + x^{b_2}y^{b_1}$$

Einige Beispiele:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &\geq x^2y + xy^2 \\ x^4y + xy^4 &\geq x^3y^2 + x^2y^3 \\ x^7y^3 + x^3y^7 &\geq x^6y^4 + x^4y^6 \end{aligned}$$

**Beweis:**

Das läßt sich leicht nachrechnen:

$$\begin{aligned} x^{a_1}y^{a_2} + x^{a_2}y^{a_1} - x^{b_1}y^{b_2} - x^{b_2}y^{b_1} &= \\ x^{a_2}y^{a_2}(x^{a_1-a_2} + y^{a_1-a_2} - x^{b_1-a_2}y^{b_2-a_2} - x^{b_2-a_2}y^{b_1-a_2}) &= \\ x^{a_2}y^{a_2}(x^{b_1-a_2} - y^{b_1-a_2})(x^{b_2-a_2} - y^{b_2-a_2}) &\geq 0. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist richtig, da die beiden Terme in den Klammern entweder beide positiv oder beide negativ sind.

□

Nun die Formulierung der Muirhead Ungleichung für drei Variable:

**Satz 3.3.** Es seien  $x, y, z$  positive reelle Zahlen und  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  positive reelle Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq 0 \quad b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq 0$$

$$a_1 \geq b_1$$

$$a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$$

Dann gilt:

$$\sum_{\text{sym}} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} \geq \sum_{\text{sym}} x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}$$

Einige Beispiele

$$\sum_{\text{sym}} x^{12} y^9 z^3 \geq \sum_{\text{sym}} x^{11} y^8 z^5$$

$$\sum_{\text{sym}} x^{12} y^{12} \geq \sum_{\text{sym}} x^{11} y^8 z^5$$

$$\sum_{\text{sym}} x^9 y^9 z^6 \geq \sum_{\text{sym}} x^8 y^8 z^8$$

**Beweis:**

Wir wollen den Beweis für den Fall  $b_1 \geq a_2$  führen: Es gilt dann:

$$\sum_{\text{sym}} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} = \sum_{\text{cyc}} z^{a_3} (x^{a_1} y^{a_2} + x^{a_2} y^{a_1}) \geq \sum_{\text{cyc}} z^{a_3} (x^{a_1+a_2-b_1} y^{b_1} + x^{b_1} y^{a_1+a_2-b_1})$$

Die letzte Ungleichung folgt aus dem Fall für zwei Variablen, da

$$a_1 \geq b_1, \quad a_1 \geq a_1 + a_2 - b_1 \quad \text{und} \quad a_1 + a_2 - b_1 + b_1 = a_1 + a_2$$

ist. Es folgt weiter:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cyc}} z^{a_3} (x^{a_1+a_2-b_1} y^{b_1} + x^{b_1} y^{a_1+a_2-b_1}) &= \sum_{\text{cyc}} x^{b_1} (y^{a_1+a_2-b_1} z^{a_3} + y^{a_3} z^{a_1+a_2-b_1}) \\ &\geq \sum_{\text{cyc}} x^{b_1} (y^{b_2} z^{b_3} + y^{b_3} z^{b_2}) = \sum_{\text{sym}} x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt wieder aus dem Fall für zwei Variablen, da

$$a_1 + a_2 - b_1 \geq a_3, \quad a_1 + a_2 - b_1 \geq b_2 \geq b_3 \quad \text{und} \quad a_1 + a_2 - b_1 + a_3 = b_2 + b_3$$

ist. Damit ist die Ungleichung für den Fall  $b_1 \geq a_2$  bewiesen. Analog beweist man den zweiten Fall  $b_1 \leq a_2$ . Gleichheit gilt für  $x = y = z$ .

□

**Beispiel 3.3.1.** (Iran 1996) Es seien  $x, y, z$  positive reelle Zahlen. Beweise:

$$(xy + yz + zx) \left( \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \right) \geq \frac{9}{4}.$$

**Lösung:** Die Gleichung ist äquivalent zu

$$4 \sum_{sym} x^5 y + \sum_{sym} x^4 y z + 6x^2 y^2 z^2 - \sum_{sym} x^4 y^2 - 6 \sum_{sym} x^3 y^3 - 2 \sum_{sym} x^3 y^2 z \geq 0.$$

Wenn man nun geeignet zusammenfasst erhält man

$$\left( \sum_{sym} x^5 y - \sum_{sym} x^4 y^2 \right) + 3 \left( \sum_{sym} x^5 y - \sum_{sym} x^3 y^3 \right) + 2xyz \left( 3xyz + \sum_{cyc} x^3 - \sum_{sym} x^2 y \right) \geq 0,$$

und die Ungleichung ist mit Muirhead und Schur bewiesen. □

Der Rechenaufwand bei dieser Methode ist oft enorm, daher wird man sie nur dann anwenden, wenn einem wirklich keine elegantere Lösung einfällt. Analoges gilt auch für die nächste Möglichkeit symmetrische Ungleichungen anzugehen:

### 3.4 Elementarsymmetrische Polynome

Symmetrische Ungleichungen kann man manchmal auch folgendermaßen lösen: Man formt die Ungleichung so um, dass nur symmetrische Polynome in der Ungleichung auftreten. Diese Polynome kann man dann nach Gauss als Polynome in den entsprechenden elementarsymmetrischen Polynomen darstellen. Diese so neu entstehende Ungleichung läßt sich dann oft recht einfach beweisen.

**Beispiel 3.4.1.** *Es seien  $x, y, z$  positive reelle Zahlen. Zeige:*

$$\sqrt[3]{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}} \geq \sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}}$$

**Lösung:** Die Ungleichung ist symmetrisch und wir erhalten:

$$\left( \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8} \right)^2 \geq \left( \frac{xy+yz+zx}{3} \right)^3$$

Jetzt stehen links und rechts vom Ungleichheitszeichen symmetrische Polynome, die wir durch Polynome in den elementarsymmetrischen Funktionen von  $x, y, z$  darstellen können. Die elementarsymmetrischen Funktionen in  $x, y, z$  sind:  $p = x + y + z, q = xy + yz + zx, r = xyz$

Es gilt:  $(x+y)(y+z)(z+x) = (x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz = pq - r$  Wir können die Ungleichung nun so anschreiben:

$$\left( \frac{pq-r}{8} \right)^2 \geq \left( \frac{q}{3} \right)^3.$$

es gilt:

$$pq - 9r \geq 0 \quad \text{da:} \quad (x+y+z)(xy+yz+zx) \geq 9xyz \quad (\text{zweimal: } AM \geq GM)$$

Setzen wir  $r \leq \frac{pq}{9}$  in obige Ungleichung ein so genügt zu zeigen:

$$\left( \frac{pq - \frac{pq}{9}}{8} \right)^2 \geq \left( \frac{q}{3} \right)^3 \quad \text{oder: } p^2 \geq 3q$$

Das ist aber genau die Ungleichung 1.6.

□

Symmetrische Ungleichungen in drei Variablen kann man daher immer über den Umweg der elementarsymmetrischen Polynome zu lösen versuchen. Folgende Ungleichungen sind dabei sehr nützlich:

**Beispiel 3.4.2.** *Es seien  $x, y, z$  positive reelle Zahlen und  $p = x + y + z, q = xy + yz + zx, r = xyz$*

$$pq - 9r \geq 0 \quad (3.8)$$

$$p^2 - 3q \geq 0 \quad (3.9)$$

$$p^3 - 4pq + 9r \geq 0 \quad (3.10)$$

$$p^4 - 5p^2q + 4q^2 + 6pr \geq 0 \quad (3.11)$$

$$p^3 \geq 27r \quad (3.12)$$

$$q^2 \geq 3pr \quad (3.13)$$

**Lösung:** Wir wollen die dritte Ungleichung beweisen: Die Ungleichung ist symmetrisch, daher können wir o.B.d.A. annehmen:  $x \geq y \geq z$ .

$$\begin{aligned} p^3 - 4pq + 9 &= (x + y + z)^3 - 4(x + y + z)(xy + yz + zx) + 9xyz = \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz) + 9xyz = \\ &= x^3 - x^2y - x^2z + xyz + y^3 - y^2x - y^2z + xyz + z^3 - z^2y - z^2x + xyz = \\ &= x(x - y)(x - z) + y(y - z)(y - x) + z(z - x)(z - y) \geq 0 \end{aligned}$$

Daher ist die Ungleichung äquivalent zur Ungleichung von Schur und damit bewiesen. Gleichheit gilt für  $x = y = z$ .

□

**Beispiel 3.4.3.** *(Rumänien 2004): Es seien  $x, y, z$  positive reelle Zahlen. Beweise:*

$$\frac{1}{x^2 + xy + y^2} + \frac{1}{y^2 + yz + z^2} + \frac{1}{z^2 + zx + x^2} \geq \frac{9}{(x + y + z)^2}$$

**Lösung:** Durch Ausmultiplizieren erhält man:

$$(x + y + z)^2 \left( \sum_{cyc} (x^2 + xy + y^2)(y^2 + yz + z^2) \right) \geq 9(x^2 + xy + y^2)(y^2 + yz + z^2)(z^2 + zx + x^2)$$

Setzt man  $p = x + y + z, q = xy + yz + zx$  und  $r = xyz$  so erhält man mit Hilfe eines unbestimmten Ansatzes

$$(p^4 - 3p^2q + 3q^2)p^2 \geq 9(p^2q^2 - p^3r - q^3),$$

also

$$p^6 - 3p^4q - 6p^2q^2 + 9p^3r + 9q^3 \geq 0,$$

und schließlich:

$$p^3(p^3 - 4pq + 9r) + q(p^4 - 6p^2q + 9q^2) \geq 0.$$

Die letzte Ungleichung ist richtig, da jeder Term auf der linken Seite nicht negativ ist:

$$p^3 - 4pq + 9r \geq 0 \text{ (vgl. 3.4.2) und } (p^4 - 6p^2q + 9q^2) = (p^2 - 3q)^2 \geq 0$$

Gleichheit gilt für  $x = y = z$ .

□

# Kapitel 4

## Substitutionen

Viele Ungleichungen lassen sich durch eine geeignete Substitution vereinfachen. Das erfordert oft Intuition und eine gewisse Erfahrung im Umgang mit Ungleichungen. Relativ naheliegend ist noch folgende Substitution:

### 4.1 Die Ravi Substitution

Man wendet diese Substitution oft dann an, wenn die Variablen  $a, b, c$  der Ungleichung Seiten eines Dreiecks sind. Man setzt:  $a = y + z, b = z + x$  und  $c = x + y$ , wobei  $x, y, z$  positive reelle Zahlen sind. Das geht, man muss nur

$$x = \frac{b + c - a}{2}, y = \frac{c + a - b}{2}, z = \frac{a + b - c}{2}$$

setzen. Mit dieser Substitution lassen sich dann viele solcher Ungleichungen vereinfachen und die Bedingung, dass die Variablen Seiten eines Dreiecks sind fällt weg.

**Beispiel 4.1.1.** (IMO 1983) Es seien  $a, b, c$  die Seiten eines Dreiecks. Beweise:

$$a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \geq 0$$

**Lösung:** Wir setzen  $a = y + z, b = z + x, c = x + y$  mit  $x, y, z > 0$   
Die Ungleichung schreibt sich dann so:

$$x^3z + y^3x + z^3y \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2$$

Damit erhalten wir

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq x + y + z,$$

und diese Ungleichung läßt sich unmittelbar mit Cauchy-Schwarz zeigen:

$$(y + z + x) \left( \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \right) \geq (x + y + z)^2$$

□

Auch die Ungleichung 3.6 läßt sich mit dieser Substitution leicht lösen.

## 4.2 Trigonometrische Substitutionen

Hier empfehlen sich oft wegen  $1 + \tan^2 \phi = \frac{1}{\cos^2 \phi}$  die Substitutionen  $x = \tan \alpha$ ,  $y = \tan \beta$  usw. mit  $\alpha, \beta, \dots \in (0, \frac{\pi}{2})$

**Beispiel 4.2.1.** (Korea 1998) Es seien  $x, y, z$  positive reelle Zahlen mit  $x+y+z = xyz$ . Beweise:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3}{2}$$

**Lösung:** Wir setzen  $x = \tan \alpha$ ,  $y = \tan \beta$ ,  $z = \tan \gamma$  mit  $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Die Ungleichung schreibt sich dann so:

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Was wird aus der Nebenbedingung  $x + y + z = xyz$ ?

Wir haben:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{x + y}{1 - xy} = -z = -\tan \gamma = \tan(\pi - \gamma)$$

und da  $\alpha + \beta, \pi - \gamma \in (0, \pi)$  liegen gilt:  $\alpha + \beta = \pi - \gamma$  also  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ . Wir haben daher nur noch zu zeigen: In einem spitzwinkligen Dreieck ABC gilt:

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}. \quad (4.1)$$

Die Funktion  $\cos x$  ist konkav auf dem Intervall  $(0, \frac{\pi}{2})$ . Mit Hilfe der Jensen-Ungleichung (vgl. Kapitel 6) erhalten wir:

$$\frac{1}{3} \cos \alpha + \frac{1}{3} \cos \beta + \frac{1}{3} \cos \gamma \leq \cos \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$$

und daraus folgt unmittelbar die Behauptung. □

Die Ungleichung 4.1 gilt nicht nur im spitzwinkligen Dreieck sondern in jedem Dreieck:

**Beispiel 4.2.2.** In jedem Dreieck ABC mit den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  gilt:

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$

**Lösung:** Sei  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Mit dem Cosinussatz erhalten wir

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \leq \frac{3}{2}.$$

also

$$a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) \leq 3abc,$$

und durch Umformung

$$(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) \leq abc.$$

Diese Ungleichung wurde aber schon bewiesen (vgl. 3.6) □

### 4.3 Algebraische Substitutionen

Algebraische Substitutionen können eine Ungleichung wesentlich vereinfachen und unmittelbar einer Lösung zuführen.

**Beispiel 4.3.1.** *Es seien  $x, y, z$  positive reelle Zahlen. Beweise:*

$$\sum_{cyc} \frac{x}{(x+y)(x+z)} \leq \frac{9}{4(x+y+z)}$$

**Lösung:** Wir substituieren  $a = x+y$ ,  $b = y+z$  und  $c = z+x$ . Wir dürfen dann  $a, b, c$  als Seiten eines Dreiecks auffassen. Die Ungleichung schreibt sich dann so:

$$\sum_{cyc} \frac{a+c-b}{2ac} \leq \frac{9}{2(a+b+c)}$$

Multipliziert man die Ungleichung mit  $a+b+c$  und formt um, so erhält man:

$$\sum_{cyc} \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \leq \frac{3}{2}.$$

Da  $a, b, c$  Seiten eines Dreiecks sind, kann man diese Ungleichung auch so anschreiben:

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Diese Ungleichung wurde aber schon bewiesen (vgl. 4.2.2).

□

Wir betrachten im folgenden zwei IMO Beispiele:

**Beispiel 4.3.2.** *(IMO 1995) Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen mit  $abc = 1$ .*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

**Lösung:** Wir substituieren  $a = \frac{1}{x}$ ,  $b = \frac{1}{y}$  und  $c = \frac{1}{z}$ . Es gilt dann:  $xyz = 1$  und mit dieser Substitution erhält man folgende Ungleichung:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{x^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

Mit Hilfe von Cauchy erhalten wir

$$[(y+z) + (z+x) + (x+y)] \left( \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{x^2}{x+y} \right) \geq (x+y+z)^2$$

und mit Hilfe der AM-GM Ungleichung folgt die Behauptung

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{x^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3(xyz)^{\frac{1}{3}}}{2} = \frac{3}{2}.$$

□

**Beispiel 4.3.3.** (IMO 2000) Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen mit  $abc = 1$ . Beweise:

$$(a - 1 + \frac{1}{b})(b - 1 + \frac{1}{c})(c - 1 + \frac{1}{a}) \leq 1$$

**Lösung:** Wir substituieren  $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$  mit  $x, y, z$  positive reelle Zahlen (z.B.:  $x = 1, y = \frac{1}{a}, z = \frac{1}{ab}$ ). Die Ungleichung läßt sich dann so anschreiben:

$$(\frac{x}{y} - 1 + \frac{z}{y})(\frac{y}{z} - 1 + \frac{x}{z})(\frac{z}{x} - 1 + \frac{y}{x}) \leq 1$$

Multipliziert man mit dem gemeinsamen Nenner, so erhält man:

$$xyz \geq (y + z - x)(z + x - y)(x + y - z)$$

Das ist die Ungleichung von Schur (vgl. 3.6)

□

**Beispiel 4.3.4.** (Rumänien 1999) Es seien  $x_1, x_2, \dots, x_n$  positive reelle Zahlen mit  $x_1 x_2 \dots x_n = 1$ . Beweise:

$$\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \dots + \frac{1}{n-1+x_n} \leq 1$$

**Lösung:** Wir substituieren:  $a_1 = \sqrt[n]{x_1}, a_2 = \sqrt[n]{x_2}, \dots, a_n = \sqrt[n]{x_n}$   
und es gilt:  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$

$$n-1+x_k = n-1+a_k^n = n-1 + \frac{a_k^{n-1}}{a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_{k+1} \dots a_n}$$

Mit Hilfe der AM-GM Ungleichung erhält man:

$$\begin{aligned} n-1 + \frac{a_k^{n-1}}{a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_{k+1} \dots a_n} &\geq n-1 + \frac{(n-1)a_k^{n-1}}{a_1^{n-1} + \dots + a_{k-1}^{n-1} + a_{k+1}^{n-1} + \dots + a_n^{n-1}} = \\ &= \frac{(n-1)(a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_n^{n-1})}{a_1^{n-1} + \dots + a_{k-1}^{n-1} + a_{k+1}^{n-1} + \dots + a_n^{n-1}}. \end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\frac{1}{n-1+x_k} \leq \frac{a_1^{n-1} + \dots + a_{k-1}^{n-1} + a_{k+1}^{n-1} + \dots + a_n^{n-1}}{(n-1)(a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_n^{n-1})}.$$

Summiert man nun über  $k$  so erhält man:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n-1+x_k} \leq 1$$

.

□

# Kapitel 5

## Homogene Ungleichungen

### 5.1 Normieren von homogenen Ungleichungen.

Eine Ungleichung  $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$  heißt homogen in den Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , wenn für ein beliebiges  $t \in \mathbb{R}^+$  gilt:

$$P(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^r P(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

mit einem bestimmten  $r \in \mathbb{R}$ .

Die offensichtliche Freiheit bei der Wahl der Variablen  $t$  lässt sich nun so ausnützen, dass wir genau eine zusätzliche Bedingung stellen können, wir können die Ungleichung normieren:

- Einer Variablen wird ein bestimmter Wert ungleich Null zugewiesen, wodurch die Anzahl der Variablen sofort um eins erniedrigt wird (z.B.  $x_1 = 1$ )
- Der Summe, dem Produkt oder einer sonstigen homogenen Größe wird ein fester Wert zugewiesen: z.B.:  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$  oder  $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$

Die dadurch entstehende normierte Ungleichung ist dann natürlich nicht mehr homogen.

**Beispiel 5.1.1.** *Es seien  $a, b$  positive reelle Zahlen. Beweise:*

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}}$$

**Lösung:** Diese Ungleichung ist homogen, denn es gilt:

$$\frac{ta+tb}{2} - \sqrt{t^2ab} - \frac{(\sqrt{ta} - \sqrt{tb})^2}{\sqrt{\frac{ta}{tb}} + \sqrt{\frac{tb}{ta}}} = t \left( \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} - \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}} \right)$$

Wir können daher o.B.d.A.  $b = 1$  wählen und wir substituieren  $a = x^2$ . Wir erhalten:

$$\frac{x^2+1}{2} - x \geq \frac{(x-1)^2}{x+\frac{1}{x}} \quad \text{oder} \quad \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{x(x-1)^2}{x^2+1} \geq 0$$

Dies ist äquivalent zu

$$\frac{(x-1)^4}{2(x^2+1)} \geq 0,$$

was offensichtlich richtig ist.

□

**Beispiel 5.1.2.** Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen. Beweise:

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1 + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

**Lösung:** Diese Ungleichung ist homogen und wir normieren mit  $abc = 1$ . Damit vereinfacht sich die ganze Ungleichung wesentlich. Wir erhalten:

$$a^2b + b^2c + c^2a + b^2a + c^2b + a^2c \geq 2(a + b + c)$$

Nach AM-GM gilt

$$ab + bc + ca \geq 3, \quad \text{und daher} \quad (ab + bc + ca)(a + b + c) \geq 3(a + b + c).$$

Daraus folgt:

$$a^2b + b^2c + c^2a + b^2a + c^2b + a^2c \geq 3(a + b + c) - 3$$

Da  $a + b + c \geq 3$  gilt, ergibt sich

$$a^2b + b^2c + c^2a + b^2a + c^2b + a^2c \geq 2(a + b + c)$$

und die Ungleichung ist bewiesen. Gleichheit für gilt für  $a = b = c$ .

□

**Beispiel 5.1.3.** (USA 2003) Es seien  $x, y, z$  positive reelle Zahlen. Beweise:

$$\frac{(2x + y + z)^2}{2x^2 + (y + z)^2} + \frac{(2y + z + x)^2}{2y^2 + (z + x)^2} + \frac{(2z + x + y)^2}{2z^2 + (x + y)^2} \leq 8$$

**Lösung:** Die Ungleichung ist homogen. Wir setzen  $x+y+z = 3$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{(2x + y + z)^2}{2x^2 + (y + z)^2} &= \frac{(x + 3)^2}{2x^2 + (3 - x)^2} = \left(\frac{1}{3}\right) \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 2x + 3} = \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{8x + 6}{2 + (x - 1)^2}\right) \leq \frac{1}{3} \left(1 + \frac{8x + 6}{2}\right) = \frac{4}{3} + \frac{4x}{3} \end{aligned}$$

Analoge Abschätzungen leitet man für die beiden anderen Summanden der linken Seite her und wir erhalten:

$$\frac{(2x + y + z)^2}{2x^2 + (y + z)^2} + \frac{(2y + z + x)^2}{2y^2 + (z + x)^2} + \frac{(2z + x + y)^2}{2z^2 + (x + y)^2} \leq \frac{4}{3} + \frac{4x}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4y}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4z}{3} = 8$$

□

## 5.2 Homogenisieren von Ungleichungen

Viele Ungleichungen haben Nebenbedingungen wie  $abc = 1$  oder  $a + b + c = 1$ . Oft kann eine nicht homogene symmetrische Ungleichung mit Nebenbedingung in eine homogene Ungleichung transformiert werden.

**Beispiel 5.2.1.** (Bundeswettbewerb 1984) Es seien  $u, v, w$  nicht negative reelle Zahlen mit  $u + v + w = 1$ . Beweise:

$$\sqrt{12uvw} + u^2 + v^2 + w^2 \leq 1.$$

**Lösung:** Die Ungleichung ist symmetrisch aber nicht homogen. Wir homogenisieren sie:

$$\sqrt{12uvw(u+v+w)} + u^2 + v^2 + w^2 \leq (u+v+w)^2$$

Es folgt

$$\sqrt{3uvw(u+v+w)} \leq (uv+vw+wu)^2,$$

und durch Ausquadrieren:

$$\sum_{cyc} u^2vw \leq \sum_{cyc} u^2v^2 = \sum_{cyc} \frac{u^2v^2 + v^2w^2}{2}$$

Die letzte Ungleichung ergibt sich aus der AM-GM Ungleichung.

□

**Beispiel 5.2.2.** (Großbritannien 1999) Es seien  $x, y, z$  positive reelle Zahlen mit  $x+y+z=1$ . Beweise:

$$7(xy+yz+zx) \leq 2+9xyz$$

**Lösung:** Diese Ungleichung ist symmetrisch aber nicht homogen. Wir Homogenisieren sie:

$$7(xy+yz+zx)(x+y+z) \leq 2(x+y+z)^3 + 9xyz$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man:

$$7\left(\sum_{cyc} x^2y + xy^2 + xyz\right) \leq 9xyz + \sum_{cyc} (2x^3 + 6x^2y + 6xy^2 + 4xyz)$$

Das ist äquivalent zu:

$$\sum_{cyc} x^2y + \sum_{cyc} xy^2 \leq \sum_{cyc} 2x^3 = \sum_{cyc} \frac{2x^3 + y^3}{3} + \sum_{cyc} \frac{x^3 + 2y^3}{3}.$$

Die letzte Ungleichung ergibt sich aus der gewichteten AM -GM Ungleichung.

□

# Kapitel 6

## Jensen Ungleichung

### 6.1 Konvexe Funktionen

**Definition:** Eine Funktion  $f$  heißt konvex im Intervall  $[a, b]$ , wenn für alle  $x_1, x_2 \in [a, b]$  und für alle  $t \in [0, 1]$  gilt:

$$tf(x_1) + (1 - t)f(x_2) \geq f(tx_1 + (1 - t)x_2)$$

Eine Funktion heißt streng konvex, wenn Gleichheit nur für  $t = 0$  oder  $t = 1$  eintritt.

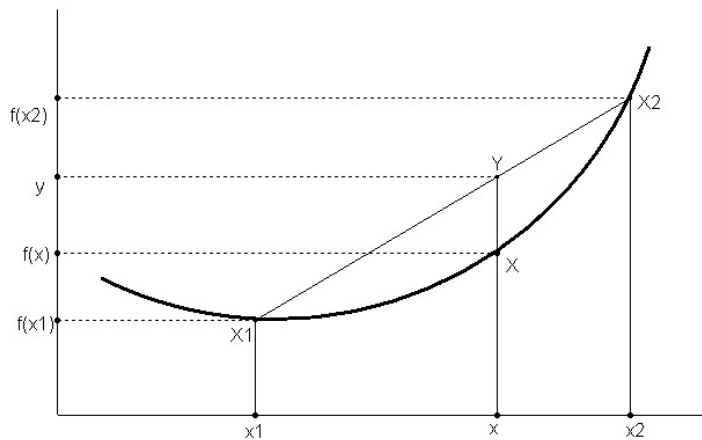


Abbildung 6.1: Konvexe Funktion

Graphisch bedeutet das folgendes: Wählt man zwei Punkte  $X_1$  und  $X_2$  am Graphen von  $f$ , so ist  $f$  genau dann konvex, wenn die Sehne die diese beiden Punkte verbindet, oberhalb des Graphen liegt. Wir zeigen die Übereinstimmung dieser graphischen Interpretation von konvex mit obiger Definition:

Es seien  $X_1(x_1, f(x_1)), X_2(x_2, f(x_2))$  zwei Punkte am Graphen der konvexen Funktion  $f$  mit  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$  und  $X(x, f(x))$  ein beliebiger Punkt am Graphen von  $f$  mit  $x_1 < x < x_2$ .  $Y(x, y)$  sei

der entsprechende Punkt auf der Sehne  $X_1X_2$ . Wir müssen zeigen, dass  $y \geq f(x)$  gilt. Wir setzen  $t = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$ , dann gilt  $t \in [0, 1]$  und  $x = tx_1 + (1 - t)x_2$ . Weiters gilt

$$t = \frac{X_2Y}{X_1X_2} = \frac{f(x_2) - y}{f(x_2) - f(x_1)},$$

und daher ist  $y = tf(x_1) + (1 - t)f(x_2)$ . Und es gilt nun:

$$y \geq f(x) \iff tf(x_1) + (1 - t)f(x_2) \geq f(tx_1 + (1 - t)x_2)$$

Eine Funktion heißt konkav, wenn  $-f$  konvex ist.

Beispiele für konvexe Funktionen:

$$x^2, \quad x^{2n} (n \in \mathbb{N}), \quad x^{2n+1} (n \in \mathbb{N}, x > 0), \quad e^x, \quad \frac{1}{x^{2n+1}} (n \in \mathbb{N}, x > 0),$$

$$\frac{1}{x^{2n}} (n \in \mathbb{N}, x \neq 0)$$

Beispiele für konkave Funktionen:

$$\sqrt{x} \quad (x \geq 0), \quad \ln x \quad (x > 0), \quad \cos x \quad \left(x \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \right)$$

Es gilt folgender Satz:

**Satz 6.1.** Eine im Intervall  $[a, b]$  zweimal differenzierbare Funktion  $f$  ist genau dann (streng) konvex im Intervall  $[a, b]$  wenn  $f''(x) \geq 0$  ( $f''(x) > 0$ ) für alle  $x \in [a, b]$  gilt.

Auf den Beweis sei hier nicht eingegangen.

Daraus folgt unmittelbar:

**Satz 6.2.** Die Summe zweier im Intervall  $[a, b]$  konvexer Funktionen ist wieder eine im Intervall  $[a, b]$  konvexe Funktion.

**Beispiel 6.1.1.** Es sei  $f$  eine im Intervall  $[a, b]$  konvexe Funktion und  $x_i \in [a, b]$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n + 1$ ) reelle Zahlen mit  $x_1 < x_2 < \dots < x_{2n+1}$ . Beweise:

$$f(x_1) - f(x_2) + f(x_3) - \dots - f(x_{2n}) + f(x_{2n+1}) \geq f(x_1 - x_2 + x_3 - \dots - x_{2n} + x_{2n+1})$$

**Lösung:** Wir führen den Beweis mit vollständiger Induktion:

Für  $n = 1$  haben wir zu zeigen:

$$f(x_1) - f(x_2) + f(x_3) \geq f(x_1 - x_2 + x_3)$$

Da  $x_1 < x_2 < x_3$  gibt es ein  $t \in [0, 1]$  mit  $x_2 = tx_1 + (1 - t)x_3$ . Da  $f$  konvex ist gilt:

$$tf(x_1) + (1 - t)f(x_3) \geq f(x_2).$$

Es gilt

$$x_1 - x_2 + x_3 = x_1 - (tx_1 + (1 - t)x_3) + x_3 = (1 - t)x_1 + tx_3,$$

und da  $f$  konvex ist ergibt sich

$$(1 - t)f(x_1) + tf(x_3) \geq f(x_1 - x_2 + x_3).$$

Addiert man nun die beiden erhaltenen Ungleichungen so ergibt sich

$$f(x_1) + f(x_3) \geq f(x_1 - x_2 + x_3) + f(x_2),$$

also:

$$f(x_1) - f(x_2) + f(x_3) \geq f(x_1 - x_2 + x_3),$$

und der Induktionsanfang ist gezeigt. Der Induktionsschluss ist jetzt einfach:

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) + f(x_3) - \cdots + f(x_{2n+1}) - f(x_{2n+2}) + f(x_{2n+3}) &\geq \\ f(x_1 - x_2 + x_3 - \cdots + x_{2n+1}) - f(x_{2n+2}) + f(x_{2n+3}) &\geq \\ f(x_1 - x_2 + x_3 - \cdots - x_{2n+1} + x_{2n+3}) & \end{aligned}$$

□

Wenn  $f$  konkav ist muss man im Beispiel 6.1.1 das Ungleichheitszeichen umdrehen. Damit ergibt sich, da  $f(x) = \sqrt{x}$  eine konkave Funktion im Intervall  $[0, +\infty[$  ist, sofort folgende Ungleichung:

**Beispiel 6.1.2.** Es seien  $x_i, (i = 1, 2, \dots, 2n+1)$  nicht negative reelle Zahlen mit  $x_1 < x_2 < \dots < x_{2n+1}$ , dann gilt:

$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} + \cdots - \sqrt{x_{2n}} + \sqrt{x_{2n+1}} \leq \sqrt{x_1 - x_2 + \cdots - x_{2n} + x_{2n+1}}.$$

Auf noch etwas Wesentliches sei hier hingewiesen:

Ist  $f$  eine im Intervall  $[a, b]$  konvexe Funktion, so nimmt diese Funktion im Intervall  $[a, b]$  das Maximum in einem der Endpunkte des Intervalls an, d.h. es gilt:

$$\max\{f(a), f(b)\} \geq f(x), \text{ für alle } x \in [a, b]$$

Im Kapitel 8.3 wird auf diesen Sachverhalt noch näher eingegangen.

## 6.2 Jensen Ungleichung

**Satz 6.3.** Für eine im Intervall  $[a, b]$  konvexe Funktion  $f$  und für  $t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, 1]$  mit  $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$  gilt

$$t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \cdots + t_n f(x_n) \geq f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n),$$

wobei alle  $x_i \in [a, b], i = 1, 2, \dots, n$ . Wenn  $f$  konkav ist muss man das Ungleichheitszeichen umdrehen:

$$t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \cdots + t_n f(x_n) \leq f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n).$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

Die Jensen Ungleichung besagt, dass der Funktionswert einer konvexen Funktion an einer konvexen Kombination von "Stützstellen" stets kleiner oder gleich der entsprechenden Kombination von den Funktionswerten der Stützstellen ist.

**Beweis:** Wir führen den Beweis mit vollständiger Induktion:

$n=2$ :

$$t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) \geq f(t_1 x_1 + t_2 x_2) \text{ Definition konvexer Funktionen } (t_1 + t_2 = 1).$$

$n=3$ :

$$t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + t_3 f(x_3) = t_3 f(x_3) + (t_1 + t_2) \left( \frac{t_1 f(x_1)}{t_1 + t_2} + \frac{t_2 f(x_2)}{t_1 + t_2} \right) \geq$$

$$t_3 f(x_3) + (t_1 + t_2) f \left( \frac{t_1 x_1}{t_1 + t_2} + \frac{t_2 x_2}{t_1 + t_2} \right) \geq f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3)$$

Ganz analog geht jetzt der Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \dots + t_n f(x_n) &= \\ t_n f(x_n) + (1 - t_n) \left( \frac{t_1 f(x_1)}{1 - t_n} + \frac{t_2 f(x_2)}{1 - t_n} + \dots + \frac{t_{n-1} f(x_{n-1})}{1 - t_n} \right) &\geq \\ t_n f(x_n) + (1 - t_n) f \left( \frac{t_1 x_1}{1 - t_n} + \frac{t_2 x_2}{1 - t_n} + \dots + \frac{t_{n-1} x_{n-1}}{1 - t_n} \right) &\geq \\ f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n) & \end{aligned}$$

□

Wichtiger Sonderfall:

Setzt man  $t_1 = t_2 = \dots = t_n$  so erhält man:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \geq f \left( \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right). \tag{6.1}$$

Wir zeigen mit Jensen eine Verallgemeinerung der Nesbitt - Ungleichung:

**Beispiel 6.2.1.** *Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen und  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ . Beweise:*

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^{n-1}$$

**Lösung:** Die Ungleichung ist homogen, wir können sie mit  $a+b+c = 1$  normieren. Es gilt dann  $0 < a, b, c < 1$  und die Ungleichung schreibt sich so:

$$\frac{a^n}{1-a} + \frac{b^n}{1-b} + \frac{c^n}{1-c} \geq \frac{1}{2 \cdot 3^{n-2}}$$

Die Funktion  $f(x) = \frac{x^n}{1-x}$  ist im Intervall  $]0,1[$  konvex, denn es gilt

$$f''(x) = \frac{(n-1)(nx^{n-2} + nx^n - 2x^n) + 2nx^{n-1}}{(1-x)^3} \geq 0,$$

für alle  $x \in ]0,1[$  und  $n \geq 1$ . Nach 6.1 folgt daher

$$\frac{f(a) + f(b) + f(c)}{3} \geq f \left( \frac{a+b+c}{3} \right),$$

also

$$\frac{1}{3} \cdot \left( \frac{a^n}{1-a} + \frac{b^n}{1-b} + \frac{c^n}{1-c} \right) \geq \frac{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{a+b+c}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}}.$$

Daraus folgt die Behauptung.

□

**Beispiel 6.2.2.** Bestimme die kleinste reelle Zahl  $C$ , so dass für alle positiven reellen Zahlen  $a, b, c, d$  mit  $a + b + c + d = 1$  gilt:

$$\sqrt{5a+1} + \sqrt{5b+1} + \sqrt{5c+1} + \sqrt{5d+1} \leq C$$

**Lösung:** Die Funktion  $f(x) = \sqrt{x}$  ist konkav in  $[0, +\infty[$ . Daher gilt mit Jensen:

$$\frac{1}{4} \cdot (\sqrt{5a+1} + \sqrt{5b+1} + \sqrt{5c+1} + \sqrt{5d+1}) \leq \sqrt{5 \cdot \frac{a+b+c+d}{4} + 1} = \frac{3}{2}$$

Daher ist  $C \leq 6$  und mit  $a = b = c = d = \frac{1}{4}$  folgt  $C = 6$ .

□

### 6.3 Beweis der Mittelungleichungen

Zunächst noch einmal die Definition des "α-Mittels" und die allgemeinen Mittelungleichung:

**Definition:** Es seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ . Das "α-Mittel" von  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sei für  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$m_\alpha := \left( \frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \dots + x_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

und für  $\alpha = 0$

$$m_0 = (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}$$

$m_1$  ist das arithmetische -Mittel,  $m_0$  das geometrische Mittel,  $m_{-1}$  ist das harmonische Mittel und  $m_2$  das quadratische Mittel.

Die allgemeine Mittelungleichung lautet nun:

**Satz 6.4.** Es seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ . Das α-Mittel von  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sei wie in obiger Definition angegeben. Dann gilt für  $\alpha < \beta$

$$\min_i \{x_i\} \leq m_\alpha \leq m_\beta \leq \max_i \{x_i\}$$

mit Gleichheit genau für  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

**Beweis:** Wir zerlegen den Beweis in mehrere Schritte:

A) Es sei  $0 < \alpha < \beta$ . Die Funktion  $f(x) = x^p$  ist für  $p > 1$  und  $x > 0$  konvex. Also gilt mit Jensen:

$$\frac{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}{n} \geq \left( \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^p$$

Wir setzen nun  $x_i = y_i^\alpha$  ( $y_i > 0$ ) und wir haben:

$$\frac{y_1^{p\alpha} + y_2^{p\alpha} + \dots + y_n^{p\alpha}}{n} \geq \left( \frac{y_1^\alpha + y_2^\alpha + \dots + y_n^\alpha}{n} \right)^p$$

Setzt man nun  $p = \frac{\beta}{\alpha}$  mit  $\beta > \alpha$  ( $p > 1$ !), so erhält man

$$\frac{y_1^\beta + y_2^\beta + \dots + y_n^\beta}{n} \geq \left( \frac{y_1^\alpha + y_2^\alpha + \dots + y_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{\beta}{\alpha}},$$

und daraus folgt sofort:

$$\left( \frac{y_1^\beta + y_2^\beta + \dots + y_n^\beta}{n} \right)^{\frac{1}{\beta}} \geq \left( \frac{y_1^\alpha + y_2^\alpha + \dots + y_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (m_\beta \geq m_\alpha)$$

B) Es sei  $\alpha < \beta < 0$ . Wir betrachten wieder die Funktion  $f(x) = x^p$ . Sie ist für  $p > 1$  und  $x > 0$  konvex und es gilt wieder mit Jensen:

$$\frac{x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p}{n} \geq \left( \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \right)^p$$

Wir setzen nun  $x_i = y_i^\beta$  ( $y_i > 0$ ) und wir haben:

$$\frac{y_1^{p\beta} + y_2^{p\beta} + \cdots + y_n^{p\beta}}{n} \geq \left( \frac{y_1^\beta + y_2^\beta + \cdots + y_n^\beta}{n} \right)^p$$

Setzt man nun  $p = \frac{\beta}{\alpha}$  mit  $\beta > \alpha$  ( $p > 1$ !), so erhält man

$$\frac{y_1^\alpha + y_2^\alpha + \cdots + y_n^\alpha}{n} \geq \left( \frac{y_1^\beta + y_2^\beta + \cdots + y_n^\beta}{n} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}},$$

und daraus folgt ( $(\dots)^{\frac{1}{\alpha}}$  mit  $\alpha < 0$ ):

$$\left( \frac{y_1^\alpha + y_2^\alpha + \cdots + y_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left( \frac{y_1^\beta + y_2^\beta + \cdots + y_n^\beta}{n} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (m_\alpha \leq m_\beta).$$

C) Es sei  $0 < \alpha$ . Die Funktion  $f(x) = \ln x$  ist auf  $\mathbb{R}^+$  konkav. Es gilt daher:

$$\frac{\ln x_1^\alpha + \ln x_2^\alpha + \cdots + \ln x_n^\alpha}{n} \leq \ln \frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \cdots + x_n^\alpha}{n}$$

also

$$\ln(x_1^\alpha \cdot x_2^\alpha \cdots x_n^\alpha)^{\frac{1}{n}} \leq \ln \frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \cdots + x_n^\alpha}{n},$$

und daher ( $\ln x$  ist eine streng monoton wachsende Funktion):

$$(x_1 \cdot x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \left( \frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \cdots + x_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (m_0 \leq m_\alpha)$$

Ist  $\alpha < 0$  so folgt ganz analog:  $m_\alpha \leq m_0$

D) Wir zeigen noch:  $\min_i \{x_i\} \leq m_\alpha$  o.B.d.A. sei  $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$  und  $\alpha < 0$ : Die Funktion  $f(x) = x^\alpha$  ist auf  $\mathbb{R}^+$  streng monoton fallend. Es gilt daher für alle  $i = 1, 2, \dots, n$ :  $x_1^\alpha \geq x_i^\alpha$  und somit:

$$x_1 \leq m_\alpha \iff x_1 \leq \left( \frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \cdots + x_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \iff nx_1^\alpha \geq x_1^\alpha + x_2^\alpha + \cdots + x_n^\alpha$$

Analog zeigt man:  $m_\alpha \leq \max_i \{x_i\}$ .

Da nach der Jensen Ungleichung Gleichheit nur für  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$  gilt, tritt bei den Mittelungleichungen ebenfalls Gleichheit nur in diesem Fall ein und damit ist alles bewiesen.

□

# Kapitel 7

## Umordnungs- und Tschebyschew Ungleichung

### 7.1 Umordnungsungleichung

**Satz 7.1.** Es seien  $x_1, x_2, \dots, x_n$  und  $y_1, y_2, \dots, y_n$  zwei Folgen reeller Zahlen. Die Summe

$$S = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

ist maximal, wenn die beiden Folgen gleichgeordnet sind (z.B.:  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  und  $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$ ) und minimal, wenn sie entgegengesetzt geordnet sind.

**Beweis:** Es sei  $\{c_i\}$  eine Permutation von  $\{y_i\}$ . Wir betrachten die Summen

$$S_1 = x_1 c_1 + \dots + x_r c_r + \dots + x_s c_s + \dots + x_n c_n$$

$$S_2 = x_1 c_1 + \dots + x_r c_s + \dots + x_s c_r + \dots + x_n c_n$$

die sich nur in dem r-ten und s-ten Summanden unterscheiden. Es gilt:

$$S_1 - S_2 = x_r c_r - x_r c_s + x_s c_s - x_s c_r = (x_s - x_r)(c_s - c_r)$$

und somit

$$S_1 > S_2 \iff c_s > c_r \quad \text{bzw.} \quad S_1 < S_2 \iff c_s < c_r$$

Daher wird die Summe  $S_1$  stets größer(kleiner) wenn man das Element  $y_i$  mit kleinstem  $i$ , welches nicht an der  $i$  ten ( $(n+1-i)$  ten) Stelle steht, mit dem jeweiligen  $c_i$  austauscht. Das Maximum (Minimum) ist erreicht, wenn beide Folgen gleichgeordnet (entgegengesetzt geordnet) sind. □

**Folgerung:** Es seien  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  und  $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$  zwei gleichgeordnete Folgen reeller Zahlen und  $\{a_i\}$  eine Permutation von  $\{y_i\}$ , dann gilt:

$$\sum_{i=1}^n x_i y_{n+1-i} \leq \sum_{i=1}^n x_i a_i \leq \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (7.1)$$

**Beispiel 7.1.1.** Es seien  $a, b, c, d$  nicht negative reelle Zahlen. Man zeige:

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 d + d^2 a.$$

**Lösung:** Es sei z.B.:  $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$ . Dann ist  $a^2 \geq b^2 \geq c^2 \geq d^2 \geq 0$  und diese Ungleichung ergibt sich sofort aus der Umordnungsungleichung. Analoges gilt für jede andere Anordnung dieser vier reellen Zahlen.

□

**Beispiel 7.1.2.** (IMO 1978) Es seien  $a_1, a_2, \dots, a_n$  positive ganze Zahlen. Beweise, dass für alle  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$  gilt:

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

**Lösung:** Es sei  $\{c_i\}$  jene Permutation von  $\{a_i\}$  für die gilt:  $c_1 < c_2 < \dots < c_n$  (Ich ordne die  $a_i$  beginnend mit der kleinsten Zahl der Größe nach). Dann gilt wegen der Umordnungsungleichung

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{k^2}$$

und da  $c_k \geq k$  ist, folgt die Behauptung:

$$\sum_{k=1}^n \frac{c_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

□

**Beispiel 7.1.3.** Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen. Beweise:

$$\frac{a+c}{a+b} + \frac{b+a}{b+c} + \frac{c+b}{c+a} \leq \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b}$$

**Lösung:** Wir setzen  $a+b+c = s$ . Die Ungleichung schreibt sich dann so:

$$\sum_{cyc} \left( \frac{s-b}{s-c} - \frac{b}{c} \right) \leq 0$$

Es gilt nun:

$$\frac{s-b}{s-c} - \frac{b}{c} = \frac{s(c-b)}{c(s-c)} = \frac{sc}{c(s-c)} - \frac{sb}{c(s-c)}$$

und wir können die Ungleichung so anschreiben:

$$\frac{c}{c(s-c)} + \frac{a}{a(s-a)} + \frac{b}{b(s-b)} \leq \frac{b}{c(s-c)} + \frac{c}{a(s-a)} + \frac{a}{b(s-b)}$$

Die Ungleichung ist nicht symmetrisch (man darf nicht o.B.d.A.  $a \geq b \geq c \geq 0$ . annehmen!), es genügt aber folgende beiden Fälle zu betrachten:

$$(1) a \geq b \geq c > 0 \quad \text{und} \quad (2) a \geq c \geq b > 0.$$

Fall 1: Es gilt

$$\frac{1}{a(s-a)} \leq \frac{1}{b(s-b)} \Leftrightarrow b(s-b) \leq a(s-a) \Leftrightarrow (a-b)c \geq 0,$$

und daher

$$\frac{1}{a(s-a)} \leq \frac{1}{b(s-b)},$$

da  $a \geq b$ . Also gilt:

$$\frac{1}{a(s-a)} \leq \frac{1}{b(s-b)} \leq \frac{1}{c(s-c)} \text{ und } a \geq b \geq c > 0,$$

und wegen der Umordnungsungleichung (vgl. Folgerung 7.1) ist die Ungleichung bewiesen. Analog behandelt man den Fall 2:  $a \geq c \geq b > 0$ .

□

## 7.2 Tschebyschew-Ungleichung

**Satz 7.2.** Sind  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  und  $\langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$  zwei gleichgeordnete Folgen reeller Zahlen (beide monoton wachsend oder beide monoton fallend), dann gilt:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i \right)$$

Sind  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  und  $\langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$  zwei entgegengesetzt geordnete Folgen reeller Zahlen, dann gilt:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i \right)$$

Gleichheit gilt in beiden Fällen genau dann, wenn eine der beiden Folgen konstant ist.

**Beweis:** Es seien  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  und  $\langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$  zwei gleichgeordnete Folgen. Dann gilt nach der Umordnungsungleichung:

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n &= a_1 b_2 + a_2 b_3 + \dots + a_n b_1 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n &= a_1 b_3 + a_2 b_4 + \dots + a_n b_2 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n &= a_1 b_4 + a_2 b_5 + \dots + a_n b_3 \\ &\dots\dots\dots \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n &= a_1 b_n + a_2 b_1 + \dots + a_n b_{n-1} \end{aligned}$$

Durch Addition erhält man:

$$n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

Das ist genau die erste Ungleichung in 7.2.

Gleichheit gilt genau dann, wenn keine Vertauschung der  $b_i$  eine Veränderung bewirkt, und das ist genau dann der Fall, wenn eine der beiden Folgen konstant ist. Analog beweist man den zweiten Teil des Satzes.

□

Es sei hier noch ein zweiter Beweis angeführt:

**Beweis:** Es seien die Folgen  $\langle a_n \rangle$  und  $\langle b_n \rangle$  gleichgeordnet. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i b_i &\geq \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i \right) \iff n \sum_{i=1}^n a_i b_i - \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i \right) \geq 0 \iff (n-1) \sum_{i=1}^n a_i b_i - \sum_{i \neq j} a_i b_j \geq 0 \\ &\iff \sum_{i \neq j} a_i (b_i - b_j) \geq 0 \iff 2 \sum_{i \neq j} a_i (b_i - b_j) = \sum_{i \neq j} (a_i - a_j) (b_i - b_j) \geq 0. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist richtig, da die Folgen  $\langle a_n \rangle$  und  $\langle b_n \rangle$  gleichgeordnet sind. Gleichheit gilt, wenn alle Summanden gleich 0 sind, also wenn mindestens eine der beiden Folgen konstant ist. Sind die Folgen  $\langle a_n \rangle$  und  $\langle b_n \rangle$  entgegengesetzt geordnet, gilt dieselbe Argumentation mit umgekehrt orientiertem Ungleichheitszeichen.

□

**Beispiel 7.2.1.** Es seien  $x_1, x_2, \dots, x_n$  positive reelle Zahlen ( $n \geq 2$ ) mit  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ .

*Beweis:*

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \dots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}$$

**Lösung:** Die Ungleichung ist symmetrisch, daher können wir o.B.d.A. annehmen:  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ . Dann gilt auch:

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} \leq \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} \leq \dots \leq \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}$$

Nach Tschebyschew gilt daher:

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1-x_i}} \right) = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1-x_i}} \right)$$

Da die Funktion  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$  auf dem Intervall  $] -\infty, 1[$  konvex ist, gilt mit Jensen:

$$\frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1-x_i}} \right) \geq \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}$$

Es genügt also zu zeigen:

$$\sqrt{n} \geq \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \dots + \sqrt{x_n}$$

Die letzte Ungleichung folgt aber aus der QM-AM Ungleichung:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sqrt{x_1^2} + \sqrt{x_2^2} + \dots + \sqrt{x_n^2}}{n}} \geq \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \dots + \sqrt{x_n}}{n}$$

Gleichheit gilt, wenn  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$

□

# Kapitel 8

## Weitere Strategien

### 8.1 Umformungen

Verschiedene Termumformungen (z.B.: Partialbruchzerlegungen) vereinfachen manche Ungleichungen bzw. führen unmittelbar zum Erfolg.

**Beispiel 8.1.1.** (Indien 2002) *Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen. Beweise:*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{c+a}{c+b} + \frac{a+b}{a+c} + \frac{b+c}{b+a}$$

**Lösung:** Es gilt:

$$\frac{a}{b} - \frac{c+a}{c+b} = \frac{c(a-b)}{b(c+b)} = \frac{c}{c+b} \cdot \frac{a-b}{b} = \frac{2c}{c+b} \left( \frac{a+b}{2b} - 1 \right)$$

Die Ungleichung kann man daher so anschreiben:

$$\sum_{cyc} \frac{2c}{c+b} \left( \frac{a+b}{2b} - 1 \right) \geq 0$$

Setzt man nun

$$\frac{a+b}{2b} = x, \quad \frac{b+c}{2c} = y \quad \text{und} \quad \frac{c+a}{2a} = z,$$

so schreibt sich die Ungleichung wie folgt:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{y} (x-1) \geq 0 \quad \text{oder} \quad \sum_{cyc} \frac{x}{y} \geq \sum_{cyc} \frac{1}{y}$$

Da  $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$  ist (vgl.1.5), gilt  $xyz \geq 1$ . Die letzte Ungleichung läßt sich aber nun durch die gewichtete AM- GM Ungleichung beweisen:

$$\sum_{cyc} \frac{x}{y} = \sum_{cyc} \frac{2\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{z}{x}}{3} \geq \sum_{cyc} \sqrt[3]{\frac{xz}{y^2}} \geq \sum_{cyc} \frac{1}{y}$$

□

## 8.2 Abschätzungen

Zu zeigen sei die zyklische Ungleichung

$$\sum_{cyc} F(x, y, z) \leq C$$

wobei  $x, y, z$  positive reelle Zahlen sind. Gelingt es uns jetzt eine Funktion  $G(x, y, z)$  zu finden mit

$$F(x, y, z) \leq G(x, y, z) \text{ und } \sum_{cyc} G(x, y, z) = C \text{ für alle } x, y, z > 0,$$

so haben wir die Ungleichung bewiesen. Gilt zum Beispiel für eine Funktion  $F$  die Abschätzung

$$F(x, y, z) \leq \frac{Cx}{x+y+z} \text{ oder } F(x, y, z) \geq \frac{Cx}{x+y+z} \text{ für alle } x, y, z > 0,$$

dann gilt für die entsprechende Ungleichung:

$$\sum_{cyc} F(x, y, z) \geq \sum_{cyc} \frac{Cx}{x+y+z} = C \text{ oder } \sum_{cyc} F(x, y, z) \leq \sum_{cyc} \frac{Cx}{x+y+z} = C$$

**Beispiel 8.2.1.** (IMO Short List 1996) Es seien  $x, y, z$  positive reelle Zahlen mit  $xyz = 1$ . Beweise:

$$\frac{xy}{x^5 + y^5 + xy} + \frac{yz}{y^5 + z^5 + yz} + \frac{zx}{z^5 + x^5 + zx} \leq 1$$

**Lösung:** Es gilt

$$x^5 + y^5 \geq x^3y^2 + x^2y^3,$$

da

$$\frac{3x^5 + 2y^5}{5} + \frac{2x^5 + 3y^5}{5} \geq x^3y^2 + x^2y^3 \quad (\text{gewichtete})AM - GM$$

Daher gilt

$$\frac{xy}{x^5 + y^5 + xy} \leq \frac{xy}{x^3y^2 + x^2y^3 + xy} = \frac{1}{x^2y + xy^2 + 1} = \frac{xyz}{xy(x+y+z)} = \frac{z}{x+y+z},$$

und damit ist die Ungleichung bewiesen:

$$\sum_{cyc} \frac{xy}{x^5 + y^5 + xy} \leq \sum_{cyc} \frac{z}{x+y+z} = 1$$

□

Manchmal reicht eine einfache Abschätzung wie  $x \leq \frac{x^2+1}{2}$  um eine Ungleichung beweisen zu können (vgl. Beispiel 28, in Kapitel 10), manchmal sind sie nicht leicht zu finden:

**Beispiel 8.2.2.** (APMO 2005) Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen mit  $abc = 8$ . Beweise:

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \geq \frac{4}{3}$$

**Lösung:** Wir verwenden folgende Ungleichung für  $x > -1$ :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \geq \frac{2}{2+x^2} \iff 2+x^2 \geq 2 \cdot \sqrt{1+x^3} \iff x^2(2-x)^2 \geq 0$$

um die linke Seite nach unten abzuschätzen. Damit ist nur mehr zu zeigen:

$$\frac{a^2}{(2+a^2)(2+b^2)} + \frac{b^2}{(2+b^2)(2+c^2)} + \frac{c^2}{(2+c^2)(2+a^2)} \geq \frac{1}{3}$$

Durch Ausmultiplizieren und mit Berücksichtigung von  $abc = 8$  erhält man

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 72,$$

und mit der AM-GM Ungleichung folgt nun die Behauptung:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 12 \\ a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{a^4b^4c^4} = 48. \end{aligned}$$

□

### 8.3 Lineare und konvexe Funktionen

Es sei  $f$  eine lineare Funktion im Intervall  $[a; b]$ . Diese Funktion nimmt ihr Maximum bzw. Minimum in  $[a; b]$  in den Endpunkten des Intervalls an, d.h. es gilt:

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \text{ oder } f(a) \geq f(x) \geq f(b) \text{ für alle } x \in [a; b]$$

Diesen einfachen Sachverhalt kann man ausnützen um Ungleichungen zu lösen:

**Beispiel 8.3.1.** *Es seien  $x, y, z$  positive reelle Zahlen mit  $x, y, z \in [0; 1]$ . Beweise:*

$$x + y + z - xyz \leq 2$$

.

**Lösung:**  $f(x, y, z) = x + y + z - xyz$  ist eine lineare Funktion in  $x$ , wenn man die beiden anderen Variablen  $y$  und  $z$  als Konstante auffasst. Die Funktion  $f$  nimmt den maximalen Wert im Intervall  $[0; 1]$  an, wenn  $x$  gleich 0 oder 1 ist. Auf dieselbe Art und Weise schließt man, dass  $y$  und  $z$  die Werte 0 oder 1 annehmen müssen, damit  $f$  maximal wird. Daher nimmt  $f$  genau dann ihr Maximum an, wenn  $x, y, z \in \{0; 1\}$ . Ist nun  $x = y = z = 1$ , dann gilt  $f(1, 1, 1) = 2$  und wir haben Gleichheit. Ist mindestens eine der Variablen gleich 0, dann ist ihr Produkt 0 und die Summe der drei Variablen ist ebenfalls höchstens 2.

□

Verallgemeinerung dieser Aufgabe:

**Beispiel 8.3.2.** *(Rumänien) Es seien  $x_1, x_2, \dots, x_n$  reelle Zahlen mit  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0; 1]$ . Beweise:*

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n - x_1x_2 \dots x_n \leq n - 1.$$

Die Lösung geht analog zum vorhergehenden Beispiel.

Es sei  $f$  nun eine konvexe Funktion im Intervall  $[a; b]$ . Diese Funktion nimmt ihr Maximum in  $[a; b]$  in den Endpunkten des Intervalls an, d.h. es gilt:

$$f(a) \geq f(x) \text{ oder } f(b) \geq f(x) \text{ für alle } x \in [a; b]$$

Auch hier betrachtet man die Ungleichung als konvexe Funktion nach jeder ihrer Variablen getrennt:

**Beispiel 8.3.3.** (Polen 2005) Es seien  $x, y, z$  reelle Zahlen mit  $x, y, z \in [0; 1]$ . Beweise:

$$\frac{x}{yz+1} + \frac{y}{zx+1} + \frac{z}{xy+1} \leq 2$$

**Lösung:** Für nicht negative reelle Zahlen ist die Funktion

$$g(x) = \frac{\alpha}{\beta x + 1} \quad \alpha, \beta > 0$$

eine konvexe Funktion. Betrachtet man daher die Funktion

$$f(x, y, z) = \frac{x}{yz+1} + \frac{y}{zx+1} + \frac{z}{xy+1}$$

als Funktion in  $x$  (wenn man die beiden anderen Variablen als Konstante auffasst), dann ist die Funktion als Summe einer linearen (homogenen) Funktion und zweier konvexer Funktionen wieder eine konvexe Funktion. Damit  $f$  den maximalen Wert im Intervall  $[0; 1]$  annimmt, muss  $x$  daher gleich 0 oder 1 sein. Analog schließt man für die anderen beiden Variablen.

Die Funktion  $f$  nimmt daher ihr Maximum an, wenn  $x, y, z \in \{0; 1\}$ . Ist nun  $x=y=z=1$ , dann gilt  $f(1, 1, 1) = \frac{3}{2}$  und die Ungleichung ist richtig. Ist eine Variable gleich 0 und die anderen beiden gleich 1, haben wir Gleichheit. Sind zwei oder mehr Variable gleich 0, dann ist der Ausdruck auf der linken Seite 1 oder 0 und die Ungleichung ist ebenfalls richtig.

□

## 8.4 Induktion

Gilt eine Ungleichung für alle natürlichen Zahlen, so kann man den Beweis oft mit vollständiger Induktion führen.

**Beispiel 8.4.1.** (Rumänien TST 1998) es seien  $a_1, a_2, \dots, a_n$  positive ganze Zahlen mit  $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ . Beweise:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3.$$

**Lösung:** Wir führen den Beweis mit vollständiger Induktion. Für  $n=1$  ist die Aussage richtig. Die Induktionsvoraussetzung können wir so anschreiben:

$$\sum_{i=1}^n a_i^3 \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i < j}^n a_i a_j.$$

Die Induktionsbehauptung ist:

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i^3 \geq \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 + 2 \sum_{i < j}^{n+1} a_i a_j$$

Setzt man die Induktionsvoraussetzung ein, so hat man zu zeigen

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i<j}^n a_i a_j + a_{n+1}^3 \geq \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 + 2 \sum_{i<j}^{n+1} a_i a_j,$$

also

$$a_{n+1}^3 \geq a_{n+1}^2 + 2a_{n+1} \sum_{i=1}^n a_i,$$

oder

$$a_{n+1}^2 \geq a_{n+1} + 2 \sum_{i=1}^n a_i.$$

Das beweisen wir wieder durch vollständige Induktion: Für  $n = 1$  erhält man:

$$a_2^2 \geq a_2 + 2a_1 \iff a_2(a_2 - 1) \geq 2a_1$$

und diese Aussage ist richtig, da nach Voraussetzung gilt:  $a_2 > a_1$ . Die Induktionsbehauptung ist:

$$a_{n+2}^2 \geq a_{n+2} + 2 \sum_{i=1}^{n+1} a_i$$

Berücksichtigt man man die Induktionsvoraussetzung so hat man zu zeigen:

$$a_{n+2}^2 \geq a_{n+2} + a_{n+1} + a_{n+1}^2$$

Das ist aber richtig, da wegen  $a_{n+2} > a_{n+1}$  gilt:

$$a_{n+2}(a_{n+2} - 1) \geq a_{n+1}(a_{n+1} + 1).$$

□

# Kapitel 9

## Weitere wichtige Ungleichungen

### 9.1 Die Bernoulli Ungleichung

**Satz 9.1.** *Es sei  $x$  eine reelle Zahl mit  $x > -1$  und  $x \neq 0$ . Weiters sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > 1$ . Dann gilt:*

$$(1 + x)^n > 1 + nx.$$

Diese Bernoulli Ungleichung kann man leicht mit vollständiger Induktion beweisen. Sie läßt sich für reelle Werte des Exponenten verallgemeinern:

**Satz 9.2.** *Es sei  $x$  eine reelle Zahl mit  $x > -1$  und  $x \neq 0$ .  $\alpha \neq 0$  sei eine beliebige reelle Zahl. Dann gilt:*

$$(1 + x)^n > 1 + \alpha x \quad \text{für } \alpha < 0 \quad \text{oder} \quad \alpha > 1.$$
$$(1 + x)^n < 1 + \alpha x \quad \text{für } 0 < \alpha < 1.$$

Der Beweis dieses Sachverhalts erfolgt mittels Differentialrechnung.

### 9.2 MacLaurin Ungleichung

**Satz 9.3.** *Es seien  $x_1, x_2, \dots, x_n$  positive reelle Zahlen. Wir definieren:*

$$S_1 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$S_2 = \frac{\sum_{i < j} x_i x_j}{\binom{n}{2}}$$

$$S_3 = \frac{\sum_{i < j < k} x_i x_j x_k}{\binom{n}{3}}$$

.....

$$S_n = x_1 x_2 x_3 \dots x_n$$

Dann gilt:

$$S_1 \geq \sqrt{S_2} \geq \sqrt[3]{S_3} \geq \dots \geq \sqrt[n]{S_n}$$

Die  $S_i$  kann man auffassen als die "Mittelwerte" der elementarsymmetrischen Polynome. Die MacLaurin Ungleichung stellt eine Verallgemeinerung der AM-GM Ungleichung dar: Das arithmetische und das geometrische Mittel sind die Endpunkte einer Kette von strengeren Ungleichungen. MacLaurin Ungleichung für drei Variable:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq \sqrt{\frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{3}} \geq \sqrt[3]{x_1x_2x_3} \tag{9.1}$$

MacLaurin Ungleichung für vier Variable:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \geq \sqrt{\frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4}{6}} \geq \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} \tag{9.2}$$

Der Beweis dieser beiden Fälle geht mit den Mittelungleichungen. Auf einen allgemeinen Beweis sei hier nicht eingegangen.

### 9.3 Young Ungleichung

**Satz 9.4.** *Es seien  $x, y, p$  und  $q$  positive reelle Zahlen mit*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

*Dann gilt:*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

*Gleichheit gilt für  $x^p = y^q$ .*

**Beweis:** Die Ungleichung kann man mit  $\frac{p+q}{q} = p$  und  $\frac{p+q}{p} = q$  auch so anschreiben:

$$xy \leq \frac{qx \frac{p+q}{q} + py \frac{p+q}{p}}{p+q}$$

Sind  $p$  und  $q$  von Null verschiedene natürliche Zahlen, so ist diese Ungleichung eine gewichtete AM-GM Ungleichung und damit bewiesen. Die Young Ungleichung kann man also als Sonderfall der gewichteten AM-GM Ungleichung auffassen.

Es seien nun  $p$  und  $q$  positive reelle Zahlen. Wir setzen:  $a = x^p$  und  $b = y^q$ . Wir müssen zeigen:

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Wir verwenden die konkave Funktion  $f(x) = \ln x$ , die Bedingung  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  und die Jensen Ungleichung und es gilt

$$\frac{1}{p} \ln a + \frac{1}{q} \ln b \leq \ln\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right),$$

also

$$\ln a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \ln\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right).$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung, da der  $\ln x$  eine streng monoton wachsende Funktion ist.

□

**Verallgemeinerung der Ungleichung von Young:**

**Satz 9.5.** Sei  $f$  eine monoton steigende stetige Funktion auf dem Intervall  $[0, c]$  mit  $f(0) = 0$ . Es sei  $g$  die inverse Funktion zu  $f$  auf dem Intervall  $[0, f(c)]$ . Dann gilt für jedes  $a \in [0, c]$  und jedes  $b \in [0, f(c)]$  die Ungleichung

$$ab \leq \int_0^a f(x) dx + \int_0^b g(y) dy$$

Gleichheit tritt nur für  $b = f(a)$  auf. Insbesondere gilt:

$$ab \leq af(a) + bf(b).$$

**Beweis:** Es sei  $b \leq f(a)$  (vergleiche Abb.: 9.1) Dann ist  $\int_0^a f(x) dx$  der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von  $f$  und der  $x$ -Achse (in der Abbildung schraffiert). Entsprechend ist  $\int_0^b g(y) dy$  der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von  $f$  und der  $y$ -Achse (in der Abbildung kariert).

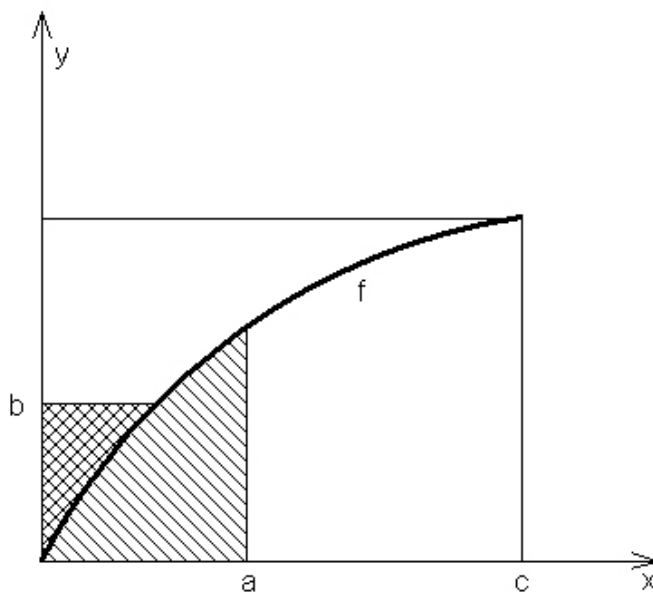


Abbildung 9.1: Young Ungleichung

Die Vereinigung von diesen beiden Flächen enthält also das Rechteck mit den Seiten  $a$  und  $b$  und damit ist die Ungleichung bewiesen.

(Der Fall  $b \geq f(a)$  kann analog betrachtet werden.)

Der Zusatz im Satz 9.5 ist auch unmittelbar einsichtig.

□

Für  $f(x) = x$  gilt  $g(y) = y$ . Die Young Ungleichung nimmt die Form

$$ab \leq \int_0^a x dx + \int_0^b y dy = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

an.

Auch der Satz 9.4 folgt sofort aus Satz 9.5 mit  $f(x) = x^{p-1}$  und  $g(y) = y^{q-1}$ . Diese beiden Funktionen sind zueinander invers, da

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff (p-1)(q-1) = 1.$$

### 9.4 Hölder Ungleichung

**Satz 9.6.** *Es seien  $p$  und  $q$  positive reelle Zahlen mit*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

*und  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$  positive reelle Zahlen. Dann gilt:*

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

**Beweis:** Zu zeigen ist also:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \leq (x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p)^{\frac{1}{p}} (y_1^q + y_2^q + \dots + y_n^q)^{\frac{1}{q}}$$

Wir setzen:

$$X = (x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p)^{\frac{1}{p}}$$

und

$$Y = (y_1^q + y_2^q + \dots + y_n^q)^{\frac{1}{q}}$$

Dividiert man die Ungleichung durch  $XY$  so erhält man:

$$\frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}{XY} \leq 1$$

Setzt man für  $i = 1, 2, \dots, n$

$$u_i = \frac{x_i}{X} \quad \text{und} \quad v_i = \frac{y_i}{Y},$$

so kann man diese Ungleichung auch so anschreiben:

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n \leq 1. \tag{9.3}$$

Klarerweise gilt:

$$u_1^p + u_2^p + \dots + u_n^p = 1 \quad \text{und} \quad v_1^q + v_2^q + \dots + v_n^q = 1 \tag{9.4}$$

Wir verwenden nun die Young Ungleichung und es gilt:

$$u_1 v_1 \leq \frac{1}{p} u_1^p + \frac{1}{q} v_1^q$$

$$u_2 v_2 \leq \frac{1}{p} u_2^p + \frac{1}{q} v_2^q$$

.....

$$u_n v_n \leq \frac{1}{p} u_n^p + \frac{1}{q} v_n^q$$

Summiert man alle diese Ungleichungen auf so ergibt sich:

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \leq \frac{1}{p} (u_1^p + u_2^p + \cdots + u_n^p) + \frac{1}{q} (v_1^q + v_2^q + \cdots + v_n^q).$$

Mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  und 9.4 ergibt sich 9.3.

□

# Kapitel 10

## Beispiele

1. Es seien  $a, b, c, d$  positive reelle Zahlen. Beweise:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq (a + b + c)d$$

2. Es sei  $a$  eine reelle Zahl. Beweise:

$$4a - a^4 \leq 3$$

3. Es seien  $a, b, c, d$  reelle Zahlen. Beweise, dass von den Zahlen  $a - b^2$ ,  $b - c^2$ ,  $c - d^2$  und  $d - a^2$  nicht alle größer als  $\frac{1}{4}$  sein können.

4. Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen. Beweise:

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c$$

5. (Estland 1997) Es seien  $x, y$  reelle Zahlen. Beweise:

$$x^2 + y^2 + 1 > x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}.$$

6. Es seien  $a, b$  positive reelle Zahlen. Beweise:

$$8(a^4 + b^4) \geq (a + b)^4$$

7. Es seien  $x, y, z$  positive reelle Zahlen.

$$\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \geq \frac{9}{x+y+z}$$

8. Es seien  $x, y, z$  positive reelle Zahlen.

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + a^2}{c + a} \geq a + b + c$$

9. Es seien  $x, y, z$  positive reelle Zahlen.

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2}{(y+z)(y+x)} + \frac{z^2}{(z+x)(z+y)} \geq \frac{3}{4}$$

10. Es seien  $a, b, c, d$  positive reelle Zahlen mit  $ab + bc + cd + da = 1$ . Beweise:

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{c+d+a} + \frac{c^3}{d+a+b} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}$$

11. Es seien  $a, b, c, d, e$  positive reelle Zahlen

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+a} + \frac{e}{a+b} \geq \frac{5}{2}$$

12. Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen mit  $ab + bc + ca = \frac{1}{3}$

$$\frac{a}{a^2 - bc + 1} + \frac{b}{b^2 - ca + 1} + \frac{c}{c^2 - ab + 1} \geq \frac{1}{a+b+c}$$

13. Es seien  $x, y, z$  positive reelle Zahlen. Beweise:

$$\frac{x^2 + 1}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2 + 1}{(y+z)(y+x)} + \frac{z^2 + 1}{(z+x)(z+y)} \geq \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2}{2(x^2 + y^2 + z^2)}$$

14. Es seien  $x, y, z$  reelle Zahlen mit  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Beweise:

$$12x + 3y + 4z \geq 13$$

Wann gilt Gleichheit?

15. Es seien  $x, y, z$  positive reelle Zahlen. Beweise:

$$(x + 2y + 3z)^2 \left( \frac{4}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{4}{9z^2} \right) \geq 108$$

Wann gilt Gleichheit?

16. Es seien  $x, y, z$  reelle Zahlen. Beweise:

$$\left( \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} \right)^2 \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{6}$$

Wann gilt Gleichheit?

17. Es seien  $a, b, c, d$ , positive reelle Zahlen. Beweise:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$$

Wann gilt Gleichheit?

18. Es seien  $x, y$  nicht negative reelle Zahlen mit  $x + y = 1$  und  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ . Beweise:

$$(n+1)x^n y \leq \left( \frac{n}{n+1} \right)^n$$

Wann gilt Gleichheit?

19. Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen mit  $a + b + c \leq 3$ . Man bestimme den kleinsten Wert, den

$$\frac{a+1}{a(a+2)} + \frac{b+1}{b(b+2)} + \frac{c+1}{c(c+2)}$$

annimmt. (Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene 2003)

20. Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen mit  $abc = 1$ . Beweise:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a + b + c.$$

21. Es seien  $a, b, c$  reelle Zahlen. Beweise:

$$\frac{a^2}{3^3} + \frac{b^2}{4^3} + \frac{c^2}{5^3} \geq \frac{(a+b+c)^2}{6^3}.$$

22. (IMO Short List 1993) Es seien  $a, b, c, d$  positive reelle Zahlen. Beweise:

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{2}{3}.$$

23. (BMO) Es seien  $a, b, c, d, e$  positive reelle Zahlen. Beweise:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 + \left(\frac{b}{c}\right)^4 + \left(\frac{c}{d}\right)^4 + \left(\frac{d}{e}\right)^4 + \left(\frac{e}{a}\right)^4 \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{e}{d} + \frac{a}{e}.$$

24. (Russland 1999) Es seien  $x, y$  positive reelle Zahlen mit  $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4$ . Beweise:

$$x^3 + y^3 \leq 2.$$

25. Es seien  $a, b, c$  nicht negative reelle Zahlen mit  $a + b + c = 3$ . Beweise:

$$\frac{a^2}{b^2+2} + \frac{b^2}{c^2+2} + \frac{c^2}{a^2+2} \geq 1.$$

26. (Baltic Way 2005) Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen mit  $abc = 1$ . Beweise:

$$\frac{a}{a^2+2} + \frac{b}{b^2+2} + \frac{c}{c^2+2} \leq 1.$$

27. (JBMO 2002) Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen. Beweise:

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

28. (JBMO 2003) Es seien  $x, y, z$  reelle Zahlen mit  $x, y, z > -1$ . Beweise:

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2} + \frac{1+y^2}{1+z+x^2} + \frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq 2$$

29. Es seien  $x, y, z$  nicht negative reelle Zahlen mit  $x + y + z = 1$ . Beweise:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 18xyz \leq 1$$

30. (Canada 1999) Es seien  $x, y, z$  nicht negative reelle Zahlen mit  $x + y + z = 1$ . Beweise:

$$x^2y + y^2z + z^2x \leq \frac{4}{27}.$$

31. (IMO 1984) Es seien  $x, y, z$  nicht negative reelle Zahlen mit  $x + y + z = 1$ . Beweise:

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$$

32. (Irland 1997) Es seien  $a, b, c$  nicht negative reelle Zahlen mit  $a + b + c \geq abc$ . Beweise:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq abc$$

33. (Ungarn 1996) Es seien  $a$  und  $b$  positive reelle Zahlen mit  $a + b = 1$  Beweise:

$$\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} \geq \frac{1}{3}$$

34. (Irland 2000) Es seien  $x, y$  nicht negative reelle Zahlen mit  $x + y = 2$ . Beweise:

$$x^2y^2(x^2 + y^2) \leq 2$$

35. (Lettland 2002) Es seien  $a, b, c, d$  positive reelle Zahlen mit

$$\frac{1}{1+a^4} + \frac{1}{1+b^4} + \frac{1}{1+c^4} + \frac{1}{1+d^4} = 1.$$

Beweise:  $abcd \geq 3$

36. (USA 1997) Es seien  $x, y, z$  positive reelle Zahlen. Beweise:

$$\frac{1}{x^3 + y^3 + xyz} + \frac{1}{y^3 + z^3 + xyz} + \frac{1}{z^3 + x^3 + xyz} \leq \frac{1}{xyz}$$

37. (Canada 2002) Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen. Beweise:

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c$$

38. (IMO 1974) Es seien  $a, b, c, d$  positive reelle Zahlen. Bestimme alle möglichen Werte von

$$\frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{b+c+a} + \frac{c}{c+d+b} + \frac{d}{d+a+c}.$$

39. (IMO Short List 1998) Es seien  $x, y, z$  positive reelle Zahlen mit  $xyz = 1$ . Beweise:

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}$$

40. (Türkei 1999) Es seien  $a, b, c$  nicht negative reelle Zahlen mit  $c \geq b \geq a \geq 0$ . Beweise:

$$(a + 3b)(b + 4c)(c + 2a) \geq 60abc$$

41. (Rumänien 1997) Es seien  $x, y, z$  positive reelle Zahlen mit  $xyz = 1$ . Beweise:

$$\frac{x^9 + y^9}{x^6 + x^3y^3 + y^6} + \frac{y^9 + z^9}{y^6 + y^3z^3 + z^6} + \frac{z^9 + x^9}{z^6 + z^3x^3 + x^6} \geq 2$$

42. Es seien  $a, b, c, d$  reelle Zahlen mit  $a, b, c, d \in [0; 1]$ . Beweise:

$$(1 - a)(1 - b)(1 - c)(1 - d) + a + b + c + d \geq 1$$

43. (USAMO 1995) Es seien  $a, b, c$  reelle Zahlen mit  $a, b, c \in [0; 1]$ . Beweise:

$$\frac{a}{b + c + 1} + \frac{b}{c + a + 1} + \frac{c}{a + b + 1} + (1 - a)(1 - b)(1 - c) \leq 1$$

44. (Rumänien TST 1999) Es seien  $x_1, x_2, \dots, x_n$  paarweise verschiedene positive ganze Zahlen. Beweise:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq \frac{2n + 1}{3}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

45. (Russland 1999) Es sei  $n$  positive ganze Zahl. Beweise:

$$\sum_{i=1}^{n^2} (\sqrt{i} - [\sqrt{i}]) \leq \frac{n^2 - 1}{2}$$

( $[x]$  bezeichnet die größte ganze Zahl kleiner oder gleich  $x$ )

46. (Iran 1999) Es seien  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  reelle Zahlen und  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$ . Beweise:

$$a_1 a_2^4 + a_2 a_3^4 + \dots + a_n a_1^4 \geq a_2 a_1^4 + a_3 a_2^4 + \dots + a_1 a_n^4.$$

47. (Deutschland TST 2004) Es seien  $x_1, x_2, \dots, x_{100}$  positive natürliche Zahlen mit

$$\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{x_{100}}} = 20.$$

Beweise: Mindestens zwei dieser natürlichen Zahlen sind gleich.

48. (Moldawien 1999) Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen. Beweise:

$$\frac{ab}{c(c+a)} + \frac{bc}{a(a+b)} + \frac{ca}{b(b+c)} \geq \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c}.$$

49. (IMO 1999) Es sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$ . Bestimme die kleinste Konstante  $C$ , so dass die Ungleichung

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left( \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right)^4$$

für alle nicht negativen reellen Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  gilt. Wann gilt für diese Konstante  $C$  Gleichheit?

50. Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen mit  $a + b + c = 1$ . Beweise:

$$\frac{a^2 + b}{b + c} + \frac{b^2 + c}{c + a} + \frac{c^2 + a}{a + b} \geq 2$$

51. (Japan 1997) Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen. Beweise:

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}$$

52. Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen. Beweise:

$$\frac{1}{a(b+1)} + \frac{1}{b(c+1)} + \frac{1}{c(a+1)} \geq \frac{3}{1+abc}$$

53. (Österreichisch- Polnischer Wettbewerb 1999) Bestimme die größte reelle Zahl  $C_1$  und die kleinste reelle Zahl  $C_2$ , so dass für alle positiven reellen Zahlen  $a, b, c, d, e$  die folgende Ungleichung gilt:

$$C_1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+e} + \frac{e}{e+a} < C_2$$

54. (Bosnien 2002) Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen mit  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Beweise:

$$\frac{a^2}{1+2bc} + \frac{b^2}{1+2ca} + \frac{c^2}{1+2ab} \geq \frac{3}{5}$$

55. Es seien  $a, b, c$  reelle Zahlen mit  $abc = 1$ . Beweise, dass höchstens zwei der Zahlen

$$2a - \frac{1}{b}, \quad 2b - \frac{1}{c}, \quad 2c - \frac{1}{a}$$

größer als 1 sind.

56. ABCD sei ein konvexes Viereck und K, L, M und N seien die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD und DA. Weiters sei  $S_1 = [AKN]$ ,  $S_2 = [BLK]$ ,  $S_3 = [CML]$ ,  $S_4 = [DNM]$  und  $S$  die Fläche des Vierecks. Beweise:

$$\sqrt[3]{S_1} + \sqrt[3]{S_2} + \sqrt[3]{S_3} + \sqrt[3]{S_4} \leq 2\sqrt[3]{S}$$

57. (Bosnien 2002) Gegeben sei das Dreieck ABC mit dem Inkreis  $k$  und dem Inkreisradius  $\rho$ . Weiters sei  $r_a$  der Radius jenes Kreises (innerhalb des Dreiecks ABC), der  $k$ , AB und AC berührt. Analog seien  $r_b, r_c$  definiert. Beweise:

$$r_a + r_b + r_c \geq \rho$$

Wann gilt Gleichheit?

58. Gegeben sei ein Dreieck ABC. Eine Gerade durch den Eckpunkt A schneidet die gegenüberliegende Seite BC im Punkt X und den Umkreis des Dreiecks in dem Punkt Y ( $\neq A$ ). Beweise:

$$\frac{1}{AX} + \frac{1}{XY} \geq \frac{4}{BC}$$

59. (Tournament of the Towns 1993) Die Gleichung  $x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = 0$  habe mindestens eine reelle Lösung. Beweise:

$$a^2 + b^2 \geq 8$$

60. (Österreichisch - Polnischer Wettbewerb 2001) Es seien  $a, b, c$  die Seitenlängen eines Dreiecks. Beweise:

$$2 < \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} - \frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \leq 3$$

61. (Rumänien TST 2002) Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen mit  $0 < a, b, c < 1$ . Beweise:

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$$

62. Es seien  $a, b, c$  die Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks. Beweise:

$$\begin{aligned} & \sqrt{-a^2+b^2+c^2}\sqrt{a^2-b^2+c^2} + \sqrt{a^2-b^2+c^2}\sqrt{a^2+b^2-c^2} + \\ & + \sqrt{a^2+b^2-c^2}\sqrt{-a^2+b^2+c^2} \leq ab+bc+ca \end{aligned}$$

63. (Polen 2005) Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen mit  $ab+bc+ca=3$ . Beweise:

$$a^3+b^3+c^3+6abc \geq 9.$$

64. (Titu Andreescu) Es seien  $x, y, z$  reelle Zahlen mit  $x, y, z \leq 1$  und  $x+y+z=1$ . Beweise:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \leq \frac{27}{10}$$

65. (Serbien und Montenegro 2005) Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen. Beweise:

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \sqrt{\frac{3(a+b+c)}{2}}$$

66. (Russland 1995) Es seien  $x, y$  positive reelle Zahlen. Beweise:

$$\frac{1}{xy} \geq \frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{y^4+x^2}$$

67. (Deutschland 2004) Ein Würfel sei so in endlich viele Quader zerlegt, dass der Rauminhalt der Umkugel des Würfels so groß ist wie die Summe der Rauminhalte der Umkugeln aller Quader der Zerlegung.

Man beweise, dass dann alle Quader Würfel sind.

68. (Mazedonien 1999) Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen mit  $a^2+b^2+c^2=1$ . Beweise:

$$a+b+c + \frac{1}{abc} \geq 4\sqrt{3}$$

69. (Rumänien 2004)

Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen

Beweise:

$$a^2+b^2+c^2+2abc+3 \geq (1+a)(1+b)(1+c).$$

70. (APMO 2004) Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen. Beweise:

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca)$$

71. (Rumänien 2005) Es seien  $x, y, z$  positive reelle Zahlen mit  $x + y + z = xyz$ . Beweise:

$$xy + yz + zx \geq 3 + \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{z^2 + 1}$$

72. (China 2005) Es seien  $a, b, c, d$  positive reelle Zahlen mit  $abcd = 1$ . Beweise:

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1$$

73. (BMO 1987) Es seien  $x, y, z$  positive reelle Zahlen. Bestimme den größtmöglichen Wert des Ausdrucks

$$\frac{xyz}{(1+x)(x+y)(y+z)(z+16)}$$

74. (ÖMO 1990) In einem konvexen Viereck ABCD sei E der Diagonalschnittpunkt.  $F_1, F_2$  seien die Flächeninhalte der Dreiecke ABE und CDE und F sei der Flächeninhalt des Vierecks ABCD. Beweise:

$$\sqrt{F_1} + \sqrt{F_2} \leq \sqrt{F}.$$

Wann gilt Gleichheit?

75. Es sei  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  eine Menge verschiedener ungerader natürlicher Zahlen. Die Beträge ihrer Differenzen  $|a_i - a_j|$  ( $1 \leq i < j \leq n$ ) seien alle verschieden. Beweise:

$$\sum_{i=1}^n a_i \geq \frac{1}{3}n(n^2 + 2)$$

76. (ÖMO 1981) In einem Dreieck seien  $s_a, s_b, s_c$  die Längen der Schwerlinien und s der halbe Umfang. Beweise:

$$s^2 \leq s_a^2 + s_b^2 + s_c^2$$

77. Gegeben sei ein Viereck mit den Seiten  $a, b, c, d$ . Beweise:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq \frac{d^4}{27}$$

78. Gegeben sei ein Quader mit den Seitenlängen  $a, b, c$ . Die Länge der Raumdiagonale sei d. Beweise:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abcd\sqrt{3}$$

Wann gilt Gleichheit?

79. (Vietnam 2005) Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen. Beweise:

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^3 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^3 + \left(\frac{c}{c+a}\right)^3 \geq \frac{3}{8}$$

80. (ÖPMW 2003) Gegeben seien die reellen Zahlen  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{2003} \geq 0$ . Beweise, dass für jede natürliche Zahl  $n$  folgende Ungleichung gilt:

$$x_1^n - x_2^n + x_3^n - \dots + x_{2003}^n \geq (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots - x_{2002} + x_{2003})^n$$

81. Bestimme das Minimum des Ausdrucks

$$|x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 100|,$$

wenn  $x$  eine beliebige reelle Zahl ist.

82. (Russland 2002) Es seien  $x, y, z$  positive reelle Zahlen mit  $x + y + z = 3$ . Beweise:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq xy + yz + zx$$

83. (Belarus 1996) Es seien  $x, y, z$  positive reelle Zahlen mit  $x + y + z = \sqrt{xyz}$ . Beweise:

$$xy + yz + zx \geq 9(x + y + z)$$

84. (IMO 1987) Es seien  $x_1, x_2, \dots, x_n$  positive reelle Zahlen mit  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ . Zeige, dass es zu jeder natürlichen Zahl  $k \geq 2$  ganze Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  mit  $|a_i| \leq k - 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  gibt (wobei nicht alle  $a_i$  gleich Null sind), die die folgende Ungleichung erfüllen:

$$|a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$$

85. (IMO 2005) Es seien  $x, y, z$  positive reelle Zahlen mit  $xyz > 1$ . Beweise:

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0$$

86. (Andreescu) Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen mit  $a + b + c \geq abc$ . Beweise, dass mindestens zwei der folgenden Ungleichungen richtig sind:

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{6}{c} \geq 6, \quad \frac{2}{b} + \frac{3}{c} + \frac{6}{a} \geq 6, \quad \frac{2}{c} + \frac{3}{a} + \frac{6}{b} \geq 6$$

87. (APMO 1999) Gegeben sind die reellen Zahlen  $x_1, x_2, x_3, \dots$  mit  $x_{i+j} \leq x_i + x_j$  für alle  $i, j$ . Beweise:

$$x_1 + \frac{x_2}{2} + \dots + \frac{x_n}{n} \geq x_n$$

88. Es seien  $x, y, z$  positive reelle Zahlen mit  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ .

Bestimme den minimalen Wert von

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$$

89. (Moldawien 1999) Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen. Beweise:

$$\frac{ab}{c(c+a)} + \frac{bc}{a(a+b)} + \frac{ca}{b(b+c)} \geq \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c}$$

90. (IMO 2003) Es sei  $n$  eine positive ganze Zahl und es seien  $x_1, x_2, \dots, x_n$  reelle Zahlen mit  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ .

a) Beweise:

$$\left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j| \right)^2 \leq \frac{2(n^2 - 1)}{3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2$$

b) Man zeige, dass Gleichheit dann und nur dann gilt, wenn  $x_1, x_2, \dots, x_n$  eine arithmetische Folge ist!

Bei der Erstellung dieser Arbeitsunterlagen wurden verwendet:

Im Internet:

[www.mathlinks.ro](http://www.mathlinks.ro)

[www.kalva.demon.co.uk](http://www.kalva.demon.co.uk)

[www.imo.math.ca](http://www.imo.math.ca)

Literatur:

Mathematical Olympiad Challe

nges, Titu Andreescu and Razvan Gelcu, Birkhäuser

Mathematical Olympiad Treasures, Titu Andreescu and Bogdan Enescu, Birkhäuser

Mathematical Olympiads, Titu Andreescu and Zuming Feng, Mathematical Association of America,

Ungleichungsskriptum der Österreichischen Mathematischen Olympiade

The USSR Olympiad Problem Book, Shklarsky, Chentzov and Yaglom,

Dover Publications

The Mathematical Olympiad Handbook, A. Gardner, Oxford Science Publications